

DIE ANWENDUNG
DES
VIERORDT'SCHEN DOPPELSPALTS
IN DER
SPECTRALANALYSE.

INAUGURAL-DISSERTATION,
DER
NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT
DER
EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE VORGELEGT

VON

WILHELM DIETRICH,
DOCENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE STUTTGART.

STUTTGART.
VERLAG VON KONRAD WITTWER.

1881.

Math. A.
70£

Dietrich

DIE ANWENDUNG
DES
VIERORDT'SCHEN DOPPELSPALTS
IN DER
SPECTRALANALYSE.

INAUGURAL-DISSERTATION,
DER
NATURWISSENSCHAFTLICHEN FACULTÄT
DER
EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE VORGELEGT
VON

WILHELM DIETRICH,
DOCENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE STUTTGART.

STUTTGART.
VERLAG VON KONRAD WITTWER.
1881.



Bekanntlich ändert Vierordt bei seiner photometrischen Methode die Intensität eines Spectrums durch Verengen oder Erweitern des Collimatorspalts. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Lichtstärke an irgend einer Stelle des Spectrums der Spaltweite proportional sei. Vierordt und Andere haben nach dieser Methode eine grosse Zahl photometrischer Bestimmungen bei verschiedenen Spaltweiten ausgeführt, welche sehr kleine wahrscheinliche Fehler eines Versuchs ergeben (1 % und weniger); insbesondere fand man auch die Absorptionscoefficienten von Lösungen verschiedener Concentration durch solche Versuche genau der Theorie entsprechend. Man darf hieraus wohl einen Schluss ziehen auf die praktische Verwendbarkeit der Methode, besonders seit Vierordt einen kleinen Mangel seines Apparats durch Zusammensetzung des Doppelspalts aus 4 beweglichen Platten verbessert hat (Wiedemanns Annalen Bd. 3). Die Voraussetzung der Proportionalität von Lichtstärke und Spaltweite wurde von Vierordt nicht näher theoretisch untersucht; er wies aber, und wohl mit vollem Recht, auf die mit dem Apparat erzielten Resultate hin und folgerte aus ihnen rückwärts die Zulässigkeit der zu Grunde gelegten Annahme.

Gerade der Kernpunkt der so bequemen Methode ist aber mehrfach angegriffen worden vom theoretischen Standpunkt aus, und obwohl man Vierordts Resultaten nichts für die spectralanalytische Praxis Wesentliches entgegenhalten konnte, so glaubte man sich doch veranlasst, dem Vierordt'schen Apparate andere Photometer, z. B. das gewiss äusserst sinnreich erdachte, aber auch weit complicirtere und deshalb vom Mechaniker mit

geringerer Exactheit anzufertigende Glan'sche Instrument (Wiedemanns Annalen 1) vorziehen zu müssen.

Die Prüfung eines neuen, aus der Werkstätte von Albrecht in Tübingen hervorgegangenen und der hiesigen technischen Hochschule gehörenden Spectrometers mit der Vierordt'schen photometrischen Vorrichtung veranlasste mich zu einer eingehenden Untersuchung der Verwendbarkeit des Doppelspalts, und ich versuchte für specielle Fälle die etwaige Abweichung der Proportionalität zwischen Lichtstärke und Spaltweite ziffermässig festzustellen. Eine genaue Feststellung des Begriffs, der mit dem Worte Lichtstärke bezeichnet werden sollte, war vor Allem nöthig, da dieses Wort bald in physiologischem, bald in mechanischem Sinne gebraucht wird. Die von Fraunhofer angegebene optische Intensitätscurve des Sonnenspectrums z. B. (Denkschr. d. Münchener Akad., 1814, 1815) kann und soll auch für die von Fraunhofer beabsichtigten Zwecke nur physiologische Bedeutung haben; ein objectives Mass der relativen Intensität der einzelnen Strahlen des Spectrums ist hiedurch nicht gegeben, da nachgewiesenermassen die Fähigkeit, die Intensitäten verschiedenfarbiger Lichtstrahlen miteinander zu vergleichen, nicht nur bei verschiedenen Personen verschieden, sondern auch bei einem und demselben Individuum subjectiven, zeitlich variablen Einflüssen unterworfen ist. Zufolge der Young'schen Hypothese kann ja auch streng genommen von einer directen Intensitätsvergleichung verschiedenfarbigen Lichts durch unser Auge so wenig die Rede sein, als von einer Vergleichung der Empfindungen ganz verschiedener Sinne. Diesem letztern Punkte ist es wohl auch zuzuschreiben, dass die 4 Versuche Fraunhofers grosse Abweichungen unter sich in Folge der Unsicherheit der Beobachtung darbieten; erlaubt man sich trotz der geringen Zahl von Versuchen die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden, so findet man aus den am angeführten Orte gegebenen Zahlenwerthen Fraunhofers die folgenden mittleren Fehler einer Beobachtung in Procenten der Lichtstärke des betreffenden Ortes des Spectrums:

B	C	D	E	F	G	H
62 0/0	45	9	20	43	58	61

Fraunhofer wandte als Normallicht eine kleine Oellampe an,

und man sieht aus obigen Zahlenwerthen, dass das Urtheil nur bei D, also bei einer homogenen Farbe, die dem nicht homogenen Licht der Lampe am meisten glich, einigermaßen sicher war, aber bei Vergleichung des Normallichts mit andern Farben ausserordentlich schwankend wurde.

Es mag mir hier gestattet sein, zu bemerken, dass ich bei ähnlichen Versuchen so lange kein brauchbares Resultat erhielt, als ich grössere Flächen verschiedener Färbung mit einander verglich. Hatte ich meiner Ansicht nach Gleichheit der Intensitäten hergestellt, so lautete mein Urtheil bei unverändertem Apparat nach einigen Minuten oft wieder ganz anders. Sobald ich aber nicht Flächen, sondern Linien, oder noch besser Punkte verschiedener Farbe zur Vergleichung brachte, erhielt ich viel sicherere Beobachtungen; der Unterschied der Farbentöne trat für mein Auge sehr zurück, und ich nahm bei feinen Punkten nur noch einen Unterschied in der Helligkeit wahr. Um diese für den vorliegenden Zweck mehr nebensächliche Bemerkung nicht zu sehr auszudehnen, will ich nur folgende Zahlenwerthe anführen, die durch ein Zöllner'sches Astrophotometer, also mit Anwendung punktförmiger Lichtquellen, gewonnen sind:

Bei blaugrünem Normallichtpunkt erhielt ich einen mittleren Fehler einer Einstellung von

8 % 6 % 6 % 7 % 5 % 7 % 6 % 9 % 2 % 5 %
der Intensität des zu messenden Lichts, wenn seine Färbung bez. blaugrün, gelbl.-grün, grünl.-gelb, goldgelb, orange, rothgelb, rothviolett, purpur, violett, blau war. Man sieht, dass sich der Einfluss der verschiedenen Farben auf die Sicherheit im Einstellen nicht mehr bemerkbar macht; dies wiegt um so schwerer, als diese Messungen zu den ersten gehörten, die ich auf photometrischem Gebiete machte.

Auf einem Wege, der principiell ganz verschieden ist von dem Fraunhofers, bestimmte Vierordt die Intensität verschiedener Spectra (s. Pogg. Ann. 1869, Bd. 137 und Vierordt, die Anwendung des Spectralapp. zur Messung und Vergleichung der Stärke des farbigen Lichts). Das Auge besitzt eine ausserordentlich grosse Empfindlichkeit in der Unterscheidung einer reinen Spectralfarbe von einer mit weissem Licht gemischten; je intensiver eine Farbe ist, um so mehr weisses Licht kann ihr beigemischt werden, ehe das Auge einen Unter-

schied zwischen der gesättigten und der Mischfarbe wahrnimmt, so dass die Menge des zur Merkbareit eben nöthigen weissen Lichts als ein Mass dienen kann für die Stärke des zu messenden farbigen. Vierordt bestimmt nun für verschiedene Stellen eines Spectrums diese Mengen weissen Lichts und setzt ihnen die Lichtintensitäten der betreffenden Stellen proportional. Hiedurch wird eine Intensitätscurve gewonnen, welche jedenfalls sehr gut zur Charakterisirung eines Spectrums dienen kann, um so mehr als eine in hohem Grade vorhandene Fähigkeit des Auges in Anspruch genommen wird. Wie stark die nach dieser Vierordt'schen Methode erhaltenen Resultate von Person zu Person und zeitlich für einen und denselben Beobachter variiren, d. h. in wie weit constante und vorübergehende körperliche Disposition des Beobachters von Einfluss ist, ist mir unbekannt; man darf aber wohl ohne Weiteres derartige subjective Einwirkungen voraussetzen. Insofern das von einem Object ausgesandte Licht vom optischen Theil unseres Sehapparats durch Absorption u. s. w. modificirt wird, und überdies die Empfindung nicht bloss von dem den Reiz verursachenden Object, sondern auch wesentlich vom empfindenden Subject abhängt, und zwar auf eine für verschiedene Individuen durchaus nicht identische Weise; insofern in Folge dessen alle Gesichtsempfindungen lediglich nur als Zeichen, nicht aber als Mass für das der Empfindung zu Grunde liegende Objective betrachtet werden dürfen, gibt auch die Vierordt'sche Intensitätscurve keine im physikalischen Sinne objectiven Werthe, sondern sie ist, wie die Fraunhofer'sche, eine physiologische Curve, nur von anderer Bedeutung als jene, und deren Hauptvorzug gegenüber der Fraunhofer'schen Curve in der weit grössern Sicherheit der ihr zu Grunde liegenden Methode besteht. Da Fraunhofer und Vierordt ganz verschiedene Fähigkeiten des Auges benützen, so sind beide Curven auch nicht direct vergleichbar.

Welche dieser Intensitätscurven man aber auch zu Grunde legen mag, so ist es doch nicht möglich, eine Untersuchung über den Einfluss der Spaltweite damit durchzuführen. An jeder Stelle eines Spectrums befinden sich in Folge der Spaltweite Strahlen verschiedener Wellenlänge, welche unserem Auge den Eindruck der Mischfarbe geben. Nimmt man nun auch an,

die Stärke der Lichtempfindung, welche jeder einzelne dieser Strahlen verschiedener Wellenlänge im Auge hervorbringt, sei genau bekannt, so ist es uns doch völlig unmöglich, rechnungsmässig zu bestimmen, welchen Grad der Lichtstärke wir empfinden, wenn alle diese Strahlen verschiedener Wellenlänge combinirt zur Wahrnehmung gelangen. Daraus geht aber hervor, dass die objective Intensität der entsprechenden Regionen zweier Spectra, die mit ungleich weitem Spalt entworfen wurden, durchaus nicht für beide gleich zu sein braucht, auch wenn für das Auge kein Unterschied der Lichtstärken existirt. Annähernde Gleichheit der objectiven Lichtstärke bei gleicher Gesichtsempfindung lässt sich zwar vermuthen, so lange die Spaltweiten nicht stark differiren, so lange also an einem bestimmten Ort des Spectrums nur Strahlen von wenig verschiedener Wellenlänge sind. — Bei sämtlichen physikalischen Anwendungen des Spectrophotometers handelt es sich nun aber um objective Lichtintensitäten und im Grunde eigentlich gar nicht um das von der Natur unserer Sehorgane abhängende subjective optische Spectrum; beim Studium der Absorptionerscheinungen z. B. ist uns der Eindruck auf unser Auge die Nebensache, und wir interessiren uns streng genommen nur für die absorbirte und für die durchgelassene mechanische Energie der Aetherschwingungen. Diese mechanische Energie und unsere subjective Empfindung gehen unsern Erfahrungen nach Hand in Hand, so lange wir es mit homogener Strahlung zu thun haben; wenigstens insofern als gleicher subjectiver Empfindung auch gleiche objective mechanische Energie entspricht. Wir erlauben uns einfach einen Analogieschluss, wenn wir dasselbe bei Strahlen von sehr wenig verschiedener Wellenlänge auch annehmen, aber berechtigt sind wir hiezu nicht ohne Weiteres. Es bleibt also nichts Anderes übrig, als vorläufig alle rechnungsmässigen Untersuchungen auf die objective, also mechanische Spectralintensitätscurve aufzubauen. Wie eine solche Curve zu gewinnen wäre, ist klar: jedenfalls dürfte unser Auge nicht bei der Bestimmung derselben als Messinstrument verwendet werden. — Bis jetzt ist Kienruss als einziger Stoff bekannt, der im Stande ist, Strahlen jeder Wellenlänge nahezu gleich vollständig zu absorbiren und die absorbirte Energie der Aetherschwingungen in Wärme umzuwandeln. Bedeckt der Kienruss

die aufnehmende Fläche einer linearen Thermosäule, so kann man mittelst derselben die mechanische Energie jeder Strahlungsgattung eines Spectrums bestimmen. Diese Methode wurde für das Sonnen- und für das Kalklichtspectrum von Lamansky angewendet (Pogg. Ann. 146); leider kann man zur Zeit nicht daran denken, auf ähnliche Weise beliebige andere Spectra zu untersuchen, weil hiezu die empfindlichste Thermosäule nicht ausreicht. Wenn wir also im Folgenden mechanische Intensitätscurven in unsere Betrachtungen einführen, so begeben wir uns auf ein Gebiet, das der experimentellen Forschung bis jetzt nur in geringem Grad zugänglich ist. Sollte je der Zukunft vorbehalten sein, auch für die äusserst geringen, hier in Frage kommenden Energien Messinstrumente aufzufinden, so hätte die Absorptionsspectralanalyse eine äusserst wichtige Erweiterung erfahren. Es würden hiedurch auch ungefärbte Stoffe in ihr Gebiet aufgenommen, und was die Hauptsache wäre, man hätte es mit Grössen zu thun, die nach absolutem mechanischem Mass gemessen wären; das Subjective, Schwankende, was allen physiologischen Messungen anhängen muss, wäre vermieden.

Gehen wir nun zur Sache über. Die Frage ist die:

»Ist die Intensität einer beliebigen Stelle irgend eines Spectrums proportional der Spaltweite? Wenn nicht, wie gross ist in einem gegebenen Fall die Abweichung von der Proportionalität?« Bei dieser Frage ist vorausgesetzt, dass mit dem Worte Intensität mechanische Energie bezeichnet werde. Von der Absorption der Linsen und Prismen, ebenso von der theilweisen Reflexion an den Flächen derselben soll abgesehen werden. Um Zahlenresultate zu gewinnen, wollen wir den oben erwähnten Albrecht'schen Spectralapparat und ein Prisma von Reinfelder und Hertel zu Grunde legen. Der brechende Winkel des Prismas ist $= 60^{\circ} 1' 54''$ und über seine Brechungsverhältnisse bei 20°C gibt folgende Zusammenstellung Aufschluss:

Fraunh. Linie	B	C	D _a	b ₁
Brechgscoeff.	$n = 1.60491$	1.60660	1.61125	1.61852
F	$\lambda = 438.3$	$\lambda = 422.6$	(Angström's Skala)	
	1.62298	1.63196	1.63572	

Gibt man, wie im Folgenden stets vorausgesetzt sei, der Linie D_α (der weniger brechbaren der beiden Natriumlinien) die kleinste Ablenkung, so erhält man folgende Ablenkungen für Strahlen anderer Wellenlänge:

B	C	D_α	b_1	F
$46^\circ 46' 28''$	$46^\circ 56' 8''$	$47^\circ 23' 2''$	$48^\circ 5' 37''$	$48^\circ 32' 4''$
	$\lambda = 438.3$	$\lambda = 422.6$		
	$49^\circ 26' 10''$	$49^\circ 49' 9''$		

Die obigen Brechungscoefficienten lassen sich unter folgender Dispersionsformel vereinigen, in welcher die Wellenlänge λ in Milliontelmillimetern anzunehmen ist:

$$\frac{1}{n^2} = 0.397\ 0693 - \frac{4164 \cdot 84}{\lambda^2}.$$

Mit $\lambda = \infty$ erhält man hiedurch als kleinsten Brechungscoefficienten dieses Prismas $n_{\min} = 1.58696$, was der Ablenkung $45^\circ 5' 17''$ entspricht. Setzt man $\lambda = 300$ (etwas brechbarer als die Linie R im Sonnenspectrum), so ergibt die Dispersionsformel $n = 1.68840$ und man findet eine Ablenkung von $55^\circ 38' 8''$. Wir wollen uns in unsern Untersuchungen zwischen diesen Grenzen $\lambda = \infty$ u. $\lambda = 300$ halten.

Ist die Spaltweite $= h$, so ist die Breite des vom Prisma entworfenen Spaltbildes, welches von einem homogenen Lichtbündel geliefert wird $= h_1 = \frac{\cos b \cos b_1}{\cos e \cos e_1} \cdot h$, wobei e und e_1 , bez. b und b_1 Einfalls- und Brechungswinkel an der ersten und an der zweiten Prismenfläche bedeuten. In der Lage der kleinsten Ablenkung wird $e = b_1$, $b = e_1$ und somit $h_1 = h$. Dieser letztere Fall tritt unserer Annahme gemäss für Linie D_α ein. Mit Benützung der oben gegebenen Brechungscoefficienten erhält man folgende Werthe für $\frac{h_1}{h}$:

$\lambda = \infty$	B	C	D_α	b_1	F	$\lambda = 422.6$	$\lambda = 300$
1.0430	1.0117	1.0080	1.0000	0.9860	0.9772	0.9506	0.8187

Nimmt man die Spaltweite $= 100$ Theilen der zur Messung des Spalts vorhandenen Mikrometertrommel $=$ der Ganghöhe der Mikrometerschraube ($= \frac{1}{3}$ mm), so entspricht dies bei unserm Instrument einer Spaltbildbreite von $165''$ für die Linie D_α , und man hat für die obenbezeichneten Orte des Spectrums $h_1 = 172''.1$ 166.9 166.4 165.0 162.7 161.2 156.9 135.1.

Bezeichnet man die Differenz der Ablenkung eines Strahls von beliebiger Wellenlänge und des Strahls $\lambda = \infty$ mit a , so ergeben die oben angeführten Ablenkungen

$$a = 0' \ 101 \cdot 2 \ 110 \cdot 9 \ 137 \cdot 7 \ 180 \cdot 3 \ 206 \cdot 8 \ 283 \cdot 9 \ 632 \cdot 9,$$

und man kann leicht eine empirische Beziehung zwischen h_1 u. a aufstellen. Man findet nämlich

$$h_1 = 172'' \cdot 1 - 0.049536 a - 0.00001410 a^2 = \alpha + \beta a + \gamma a^2,$$

wobei sich a wie auch bei allen folgenden Formeln auf die Spaltbildmitte bezieht.

Ein den Spalt h passirendes homogenes Lichtbündel habe pro Flächeneinheit seines Querschnitts die Energie i ; dasselbe

breitet sich nach der Dispersion über eine $\frac{h_1}{h}$ mal grössere

Fläche aus. Das Spaltbild hat somit pro Flächeneinheit eine

Energie $i_1 = \frac{h}{h_1} \cdot i$. Das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$ hat folgende Werthe

für die obenbezeichneten Stellen des Spectrums:

$$0.959 \ 0.988 \ 0.991 \ 1.000 \ 1.014 \ 1.023 \ 1.052 \ 1.221.$$

Man kann dieselben in folgender empirischen Formel zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1} &= 0.959 + 0.00025704 a + 0.00000024968 a^2 \\ &= \alpha_1 + \beta_1 a + \gamma_1 a^2. \end{aligned}$$

Bei Aenderung der Spaltweite bleibt das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$

dasselbe, woraus folgt, dass die Energie pro Flächeneinheit eines durch ein homogenes Lichtbündel erhaltenen Spaltbilds ganz unabhängig von der Spaltweite ist. Die Verstärkung der Intensität eines continuirlichen Spectrums mit wachsender Spaltweite beruht also nur auf der theilweisen Uebereinanderlagerung der Spaltbilder verschiedener Wellenlänge; jedes dieser Spaltbilder hat eine Intensität pro Flächeneinheit, die ganz unabhängig von der Spaltweite ist.

Wenn in der Folge von Intensitätscurve eines Spectrums die Rede ist, soll stets diejenige Curve verstanden werden, welche man erhält, wenn man die i_1 als Ordinaten, die a als Abscissen nimmt. Eine von der Natur des Prismas unabhängige, das zu analysirende Lichtbündel am besten charakterisirende Curve, welche die i als Ordinaten und die Wellenlängen

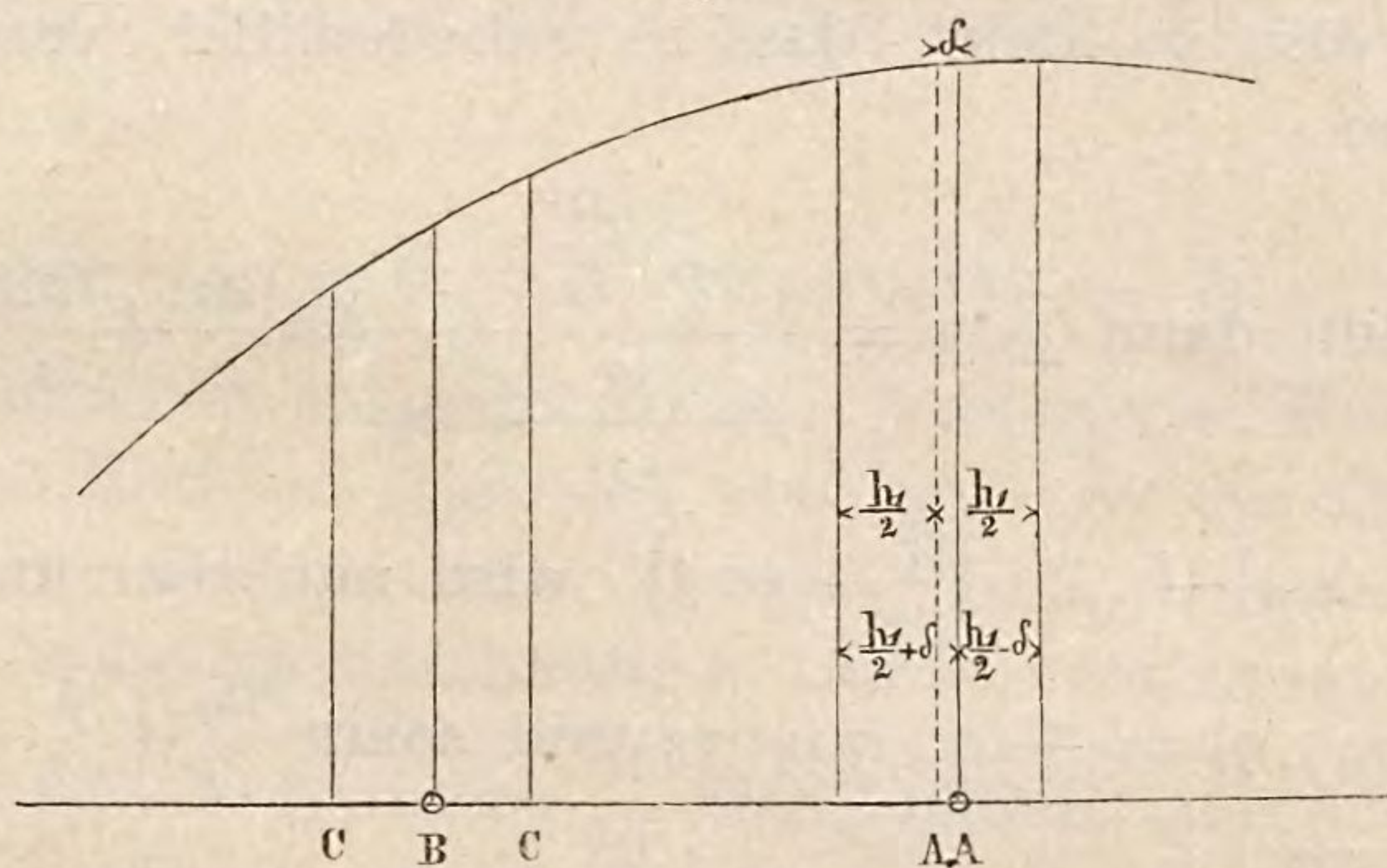
als Abscissen hat, kann vermittelst der bekannten Grössen $\frac{h}{h_1}$ aus der Curve i_1 abgeleitet werden.

An einer Stelle des Spectrums von der Breite da fallen Spaltbilder verschiedener Wellenlängen übereinander; ist die Energie eines den Spalt passirenden homogenen Lichtbündels pro Flächeneinheit $= i$, so hat man auf der Breite da des Spectrums bei der Spaltlänge 1 die Energie $i \cdot \frac{h}{h_1} da = i_1 da$, und somit die Gesamtenergie, welche in Folge der UeBER-einanderlagerung verschiedener Spaltbilder auf der Breite da vorhanden ist

$$I = \int i \frac{h}{h_1} da = \int i_1 da$$

wobei die Integration über alle Strahlen auszudehnen ist, welche auf da zusammenfallende Spaltbilder liefern. Die Integrationsgrenzen können durch folgende Betrachtung gefunden werden: Strahlen, welche im reinen Spectrum, d. h. mit linearem Spalt, bei B (Fig. 1) ein lineares Spaltbild geben, liefern bei nach

Fig. 1.



beiden Seiten zu B symmetrischer Erweiterung des Spalts ein Spaltbild, das noch auf C übergreift, wenn $BC =$ der halben Spaltbildbreite für Punkt B ist. Hat man nun für Punkt C die Spaltbildbreite $h_1 = \alpha + \beta a + \gamma a^2$ und ist $BC = \pm \Delta a$, so hat man in B eine Spaltbildbreite

$$h'_1 = \alpha + \beta (a \pm \Delta a) + \gamma (a \pm \Delta a)^2,$$

und man hat also für die äussersten Punkte B, denen noch ein auf C übergreifendes Spaltbild zukommt, die Bedingung

$$\frac{h'_1}{2} = \Delta a \text{ oder } \alpha + \beta (a \pm \Delta a) + \gamma (a \pm \Delta a)^2 = 2 \Delta a,$$

wobei das Zeichen $+$ die obere Grenze, das Zeichen $-$ die untere Grenze des Integrals liefert. Man findet für erstere

$$h_1 + \Delta a (\beta + 2 a_\gamma - 2) + (\Delta a)^2 \cdot \gamma = 0, \text{ also}$$

$$\Delta a = \frac{2 - \beta - 2 a_\gamma \pm \sqrt{(2 - \beta - 2 a_\gamma)^2 - 4 h_1 \gamma}}{2 \gamma}$$

Der Natur der Sache nach muss man hier auf der rechten Seite vor der Wurzel das Zeichen $-$ nehmen. Die Zahlenwerthe $\beta = -0.049536$, $\gamma = -0.00001410$ ergeben, dass das Glied $(2 - \beta - 2 a_\gamma)^2$ unter dem Wurzelzeichen viel grösser ist, als das eben dort befindliche $4 h_1 \gamma$, so dass es gerechtfertigt ist, die Wurzel in eine Reihe zu entwickeln. Man hat dann

$$\Delta a = \frac{2 - \beta - 2 a_\gamma}{2 \gamma} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4 h_1 \gamma}{(2 - \beta - 2 a_\gamma)^2} - \frac{1}{8} \frac{16 h_1^2 \gamma^2}{(2 - \beta - 2 a_\gamma)^4} - \dots \right) \right)$$

$$= \frac{h_1}{2 - \beta - 2 a_\gamma} + \frac{h_1^2 \gamma}{(2 - \beta - 2 a_\gamma)^3}$$

Das zweite Glied wird mit den gegebenen Zahlenwerthen und den vorausgesetzten Grenzen im Maximum $= -0.052 = -\frac{1}{20}''$, also so klein, dass es unbedenklich vernachlässigt werden kann.

Es bleibt dann $\Delta a = \frac{\frac{h_1}{2}}{1 - \frac{\beta}{2} - a_\gamma} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + a_\gamma \right) + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + a_\gamma \right)^2 + \dots; \left(\frac{\beta}{2} + a_\gamma \right)^2$ wird nun aber im Maximum (mit $a = 632.9$) $= +0.001135$ und somit $\frac{h_1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + a_\gamma \right)^2$ ungefähr $= \frac{170}{2} \cdot 0.001135 = +0.1''$. Da das vorhin weggelassene Glied etwa $-0.05''$ betrug, so kann um so mehr ohne merklichen Fehler gesetzt werden

$$\Delta a = \frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} + a_\gamma \right).$$

Dieser Ausdruck liefert die obere Integrationsgrenze. Für die Bestimmung der untern hat man Δa negativ einzuführen, woraus sich durch analoge Umbildung ergibt

$$\Delta a = \frac{h_1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2} - a_\gamma \right).$$

Das Integral $\int i \frac{h}{h_1} da$ hat also die obere Grenze $a + \frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} + a \gamma\right)$ und die untere $a - \frac{h_1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2} - a \gamma\right)$. Diese beiden Grenzen sind sehr nahe $= a + \frac{h_1}{2}$ und $= a - \frac{h_1}{2}$, und es wird sich fragen, ob man nicht diese Annäherungswerthe überhaupt substituiren darf, d. h. ob man nicht β und $\gamma = 0$ setzen kann.

Ehe wir hierüber eine nähere Untersuchung anstellen, soll eine Bemerkung über die bestimmten Integrale

$$I = \int i \frac{h}{h_1} da = \int i_1 da$$

hier ihre Stelle finden. Das Integral $\int i \frac{h}{h_1} da$ enthält einen Factor $\frac{h}{h_1}$, der von a abhängig ist. Man fand oben für ihn die empirische Formel

$$\frac{h}{h_1} = 0.959 + 0.000257 a + 0.00000024968 a^2, \text{ und hat also}$$

$$\frac{d \frac{h}{h_1}}{da} = 0.000257 + 0.00000049936 a = \beta_1 + 2 \gamma_1 a, \text{ wo}$$

a in Bogenminuten ausgedrückt ist. Numerische Rechnung ergibt hieraus: Entfernt man sich von dem Ort der Linien

$$\lambda = \infty \quad B \quad C \quad D \quad b_1 \quad F \quad 422.6 \quad 300$$

etwa um die halbe Spaltbildbreite h_1 (für $h = 100$ Trommeltheilen),

so erleidet das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$ eine Zunahme oder Abnahme von

$$0.0004 \quad 0.0004 \quad 0.0004 \quad 0.0005 \quad 0.0005 \quad 0.0005 \quad 0.0005 \quad 0.0007$$

also nicht einmal $\frac{1}{1000}$ im Maximum. Mit dem Verhältniss $\frac{h}{h_1}$

ist aber i , die Intensität pro Flächeneinheit eines durch den Spalt eintretenden homogenen Lichtbündels, zu multipliciren,

um i_1 zu erhalten; so lange man auf eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$

bei photometrischen Messungen verzichten muss, kann man

innerhalb der Grenzen des obigen Integrals $\frac{h}{h_1}$ unbedenklich als

constant betrachten. Diese Vernachlässigung ist um so eher zulässig, als zwischen a und $a - \Delta a$ das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$ kleiner ist als bei a , zwischen a und $a + \Delta a$ dagegen grösser, so dass

der Fehler in $\int_{a - \Delta a}^{a + \Delta a} \frac{h}{h_1} i da$ nur gering werden kann. Mit der

Annahme $\frac{h}{h_1} = \text{Const.}$ innerhalb der Integrationsgrenzen erhält

$$\text{man } I = \int i_1 da = \frac{h}{h_1} \int i da.$$

Diese bestimmten Integrale bedeuten Flächenstücke der 2 Curven i_1 und i zwischen 2 Ordinaten, die eine Entfernung gleich der Spaltbildbreite von einander haben und deren Abscissen $a + \frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} + a \gamma \right)$ und $a - \frac{h_1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2} - a \gamma \right)$ sind. Die letzte Gleichung zeigt, dass man durch einfache Multiplication mit $\frac{h}{h_1}$ genau genug jenes Flächenstück für die Curve i_1 finden kann, wenn statt dieser etwa die allgemeinere Curve i gegeben wäre.

Mit Anwendung der gegebenen Zahlenwerthe und unter Annahme von $h = 100$ Trommeltheilen der Mikrometerschraube erhält man für

$\lambda = \infty \quad B \quad C \quad D_\alpha \quad b_1 \quad F \quad \lambda = 422.6 \quad 300$
den Werth

$$\frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} + a \gamma \right) = 83''.9 \quad 81.2 \quad 81.0 \quad 80.3 \quad 79.1 \quad 78.4 \quad 76.2 \quad 65.2$$

und

$$\frac{h_1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{2} - a \gamma \right) = 88''.1 \quad 85.6 \quad 85.4 \quad 84.7 \quad 83.5 \quad 82.8 \quad 80.6 \quad 69.8$$

Diese Zahlen geben Aufschluss darüber, welche homogenen Strahlen in einem gegebenen Punkt des Spectrums übereinanderfallen; z. B. Linie D_α erhält bei der angenommenen Spaltweite von allen Strahlen noch Licht, deren Spaltbilder um $84.7''$ gegen das Rothe hin und um $80.3''$ gegen das Violette

hin im reinen Spectrum (mit linearem Spalt) von der Linie D_{α} absteigen. Die Verschiebung der Integrationsgrenzen in Folge der veränderlichen Spaltbildbreite ist, wie die letzte Tabelle zeigt, für die ganze Ausdehnung des Spectrums ziemlich constant $= 2.2''$, und zwar gegen das Rothe hin gerichtet. Um also die in einem Punkte A des Spectrums vorhandene Intensität zu bestimmen, darf man in der Curve i_1 nicht einen Flächenstreifen mit zum Punkte A symmetrischen Endordinaten in Betracht ziehen, sondern man muss von einem Punkte A_1 aus, der im Vergleich mit A um $= 2.2''$ gegen das minder brechbare Ende des Spectrums verschoben ist (bei $h = 100$ Trommeltheilen), die halbe Spaltbildbreite nach rechts und links abtragen, um die Endordinaten jenes die Intensität angegebenden Flächenstreifens zu erhalten (Figur 1). Dieser Punkt A_1 soll Hilfspunkt genannt werden, während mit der Bezeichnung Hauptpunkt der Punkt A, dessen Intensität zu bestimmen ist, gemeint sein soll. Die Entfernung AA_1 ist abhängig von der Spaltweite und werde für die Spaltweite $h = 100$ mit δ bezeichnet; wird keine grössere Spaltweite als 100 Trommeltheile der Mikrometerschraube zugelassen, so ist der grösste Werth von AA_1 bei unserem Instrument $= 2.2''$.

Die Intensitätscurve i_1 hat im Allgemeinen innerhalb einer Spaltbildbreite keine sehr schroffen Wechsel in der Grösse der Ordinate; später werden wir finden, dass auch nur bei Spectren, welche langsame Intensitätsänderungen zeigen, also z. B. keine schmalen, dunkeln Absorptionsbänder darbieten, der Doppelspalt verwendet werden darf. Nehmen wir ein solches, für unsere Zwecke passendes Spectrum an, so wird es in den meisten Fällen völlig gerechtfertigt sein, das Stück der Curve i_1 innerhalb einer Spaltbildbreite als Curve zweiten, oft sogar als solche ersten Grads zu betrachten. Um uns Rechenschaft darüber geben zu können, was für einen Fehler wir begehen, wenn wir den Hilfspunkt mit dem Hauptpunkt zusammenfallend annehmen, wollen wir eine Curve zweiten Grads voraussetzen. Am einfachsten nehmen wir, auch in allen folgenden Betrachtungen, die Ordinate im Hauptpunkt A als Ordinate Axe, A als Ursprung; die Abscissen bezeichnen wir mit x , positiv im Sinn der wachsenden Ablenkung. Die Curve i_1 hat dann für den Punkt A und in seiner Nähe die Gleichung $i_1 = m + n x + p x^2$;

der zum Hauptpunkt gehörige Flächenstreifen hat den Inhalt

$$\int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} m + nx + px^2 dx = mh_1 + \frac{1}{12} ph_1^3, \text{ der zum Hilfspunkt}$$

$$\text{gehörige } \int_{-\frac{h_1}{2}-\delta}^{\frac{h_1}{2}-\delta} m + nx + px^2 dx = mh_1 + \frac{1}{12} ph_1^3 - nh_1\delta + ph_1\delta^2.$$

Die Differenz zwischen diesen zwei Flächenstreifen ist $= -nh_1\delta + ph_1\delta^2$, und das Verhältniss dieser Differenz zum

$$\begin{aligned} \text{Flächenstreifen des Hilfspunkts} = F &= \frac{-nh_1\delta + ph_1\delta^2}{mh_1 + \frac{1}{12} ph_1^3 - nh_1\delta + ph_1\delta^2} \\ &= - \frac{n\delta - p\delta^2}{m + \frac{1}{12} ph_1^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n\delta - p\delta^2}{m + \frac{1}{12} ph_1^2}} = - \left(\frac{n\delta - p\delta^2}{m + \frac{1}{12} ph_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n\delta - p\delta^2}{m + \frac{1}{12} ph_1^2} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

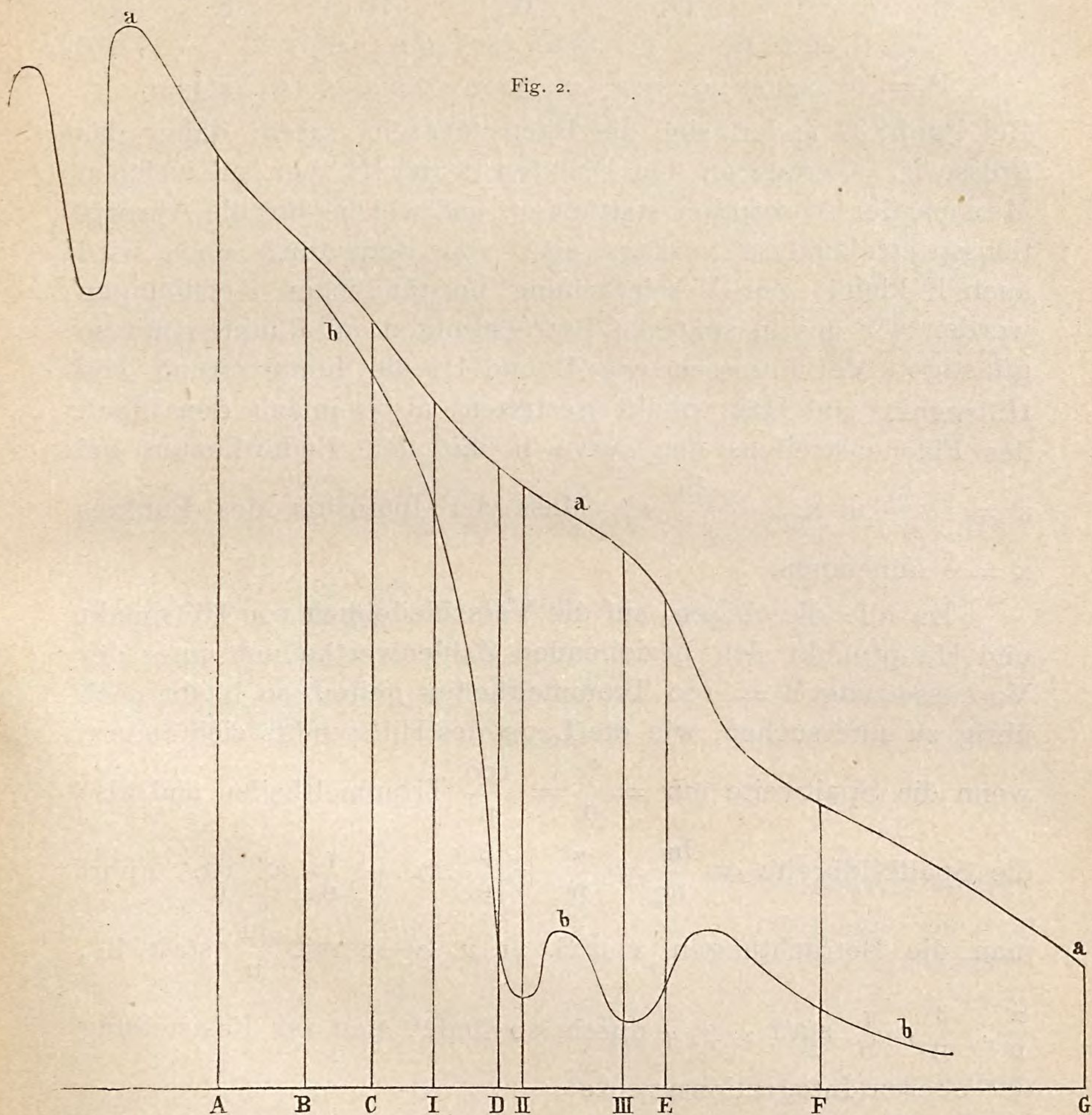
Diese Grösse F gibt den Fehler an, den man begeht, wenn man Hilfspunkt und Hauptpunkt zusammenfallend annimmt, und zwar in Theilen der Intensität des Hauptpunkts ausgedrückt. Um einen Anhaltspunkt über die Grösse von F zu gewinnen, nehmen wir verschiedene Stellen der für unser Prisma aufgetragenen Lamansky'schen Intensitätscurve des Sonnenspectrums (Fig. 2a). Dieselbe ist zwar keine Curve II in unserem Sinne, denn sie wurde ohne Berücksichtigung der Spaltweite ($\frac{1}{2}$ mm) gewonnen; wir kommen auf einen andern Unterschied später noch zurück (S. 54). Die Werthe von m, n und p können für jeden Punkt der Curve aus einer Zeichnung genau genug entnommen werden. Man erhält dann für

B	D _α	b ₁	F	G	den Fehler
F = 0.0002	0.0003	0.0017	0.0004	0.0013.	

Blos bei b₁, wo n sehr gross und bei G, wo m klein ist, erreicht F eine nennenswerthe Grösse, für alle andern Punkte

kann man unbedenklich Hilfspunkt und Hauptpunkt als identisch betrachten.

Auch bei einem Spectrum, das mehr Abwechselung der Intensität bietet, kommt man zum nämlichen Resultat. Fig. 2b



zeigt die mechanische Intensitätscurve des Blutspectrums, wie man sie mit Hilfe der bekannten Absorptionscoefficienten des Bluts aus der Intensitätscurve i_1 des Sonnenspectrums ableiten kann. Diese Absorptionscoefficienten sind zwar auf optisch-physiologischem Wege gewonnen; wir werden aber nicht viel

fehlgreifen, wenn wir sie als nahezu übereinstimmend betrachten mit den Absorptionscoefficienten der mechanischen Energie, besonders da es sich nur um Annäherungen an die Curve i_1 handeln kann. Es ergibt sich für die Punkte

I	D _α	II	III	E
(λ = 614)		(λ = 580)	(λ = 538)	
F = 0.0009	0.012	0.0002	0.0005	0.0033.

Bei Punkt D ändert sich die Intensität sehr rasch, daher das grosse F. Gerade an den Punkten II und III aber, an welchen Maxima der Absorption stattfinden, und welche für die Absorptionsspectralanalyse vorzugsweise von Bedeutung sind, wird auch F klein. Zur Vereinfachung umständlicher Rechnungen werden wir uns in späteren Betrachtungen an Punkten mit so günstigen Verhältnissen wie II und III die Identificirung von Hilfspunkt und Hauptpunkt gestatten, also einfach den Inhalt des Flächenstreifens der Curve i_1 mit den Endordinaten bei $x = \frac{+h_1}{2}$ u. $x = \frac{-h_1}{2}$ als Mass der Intensität des Punktes $x = 0$ annehmen.

Da alle die obigen, auf die Verschiedenheit von Hilfspunkt und Hauptpunkt sich beziehenden Zahlenwerthe nur unter der Voraussetzung $h = 100$ Trommeltheilen gelten, so bleibt noch übrig zu untersuchen, wie die Lage des Hilfspunkts sich ändert,

wenn die Spaltweite nur $= \frac{h}{n} = \frac{100}{n}$ Trommeltheilen und also die Spaltbildbreite $= \frac{h_1}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} \cdot a + \frac{\gamma}{n} a^2$ ist. Führt man die Betrachtungen von S. 11 u. S. 12 mit $\frac{h_1}{n}$ statt h_1 ,

$\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\beta}{n}$, $\frac{\gamma}{n}$ statt α , β , γ durch, so findet man zur Feststellung der oberen Integrationsgrenze

$$\Delta a = \frac{h_1}{2n} \left(1 + \frac{\beta}{2n} + a \frac{\gamma}{n} \right), \text{ und zur Bestimmung der untern}$$

$$\Delta a = \frac{h_1}{2n} \left(1 - \frac{\beta}{2n} - a \frac{\gamma}{n} \right).$$

Hieraus ergibt sich die Verschiebung der beiden Integrationsgrenzen gegen das minder brechbare Ende des Spectrums

in Folge der mit der Ablenkung veränderlichen Spaltbildbreite

$$\delta_1 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{h_1}{2} \left(\frac{\beta}{2} + a \gamma \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \delta,$$

und dies ist auch die Entfernung des Hilfspunkts vom Hauptpunkt bei der Spaltweite $\frac{h}{n} = \frac{100}{n}$ Trommeltheile, also proportional dem Quadrat der Spaltweite. Bei Verminderung der Spaltweite rückt demnach der Hilfspunkt dem Hauptpunkt sehr rasch näher und F nimmt schnell ab (annähernd nach demselben Gesetz wie δ_1).

Bezeichnet man ganz allgemein irgend eine Spaltweite mit s, die Spaltbildbreite mit s_1 , während h und h_1 sich auf die Maximalspaltweite 100 Trommeltheile und auf die zugehörige Spaltbildbreite beziehen sollen, so erhält man

$$\delta_1 = \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot \delta = \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot 2 \cdot 2''$$

und somit als Grenzen des Integrals $I = \int i_1 da$ die Werthe

$$a + \frac{s_1}{2} - \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot 2 \cdot 2'' \text{ und } a - \frac{s_1}{2} - \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot 2 \cdot 2''$$

Unter der Voraussetzung, dass wir ein Messinstrument besitzen, das uns gestattet, die mechanische Energie eines linearen Spectralstreifens zu bestimmen, wollen wir den Fehler untersuchen, der durch Anwendung einer endlichen constanten Spaltweite s bei Intensitätsmessungen an verschiedenen Orten eines Spectrums begangen wird. Eigentlich ist es uns stets um die Ordinaten i_1 oder i zu thun; statt derselben messen wir die Grösse I. Wir denken uns wieder die Curve i_1 übereinstimmend mit einer Curve zweiten Grades innerhalb einer Spaltbildbreite; nimmt man den Punkt A, dessen Intensität jeweils bestimmt werden soll, als Ursprung, so erhalte man als Gleichung der Curve $i_1 = m_1 + n_1 x + p_1 x^2$, und desgleichen für einen zweiten Punkt B $i_1 = m'_1 + n'_1 x + p'_1 x^2$.

Unsere die Intensität messenden Flächenstreifen werden somit

$$\begin{aligned} & \frac{s_1}{2} - \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot \delta \\ \text{für Punkt A} \quad I_1 &= \int m_1 + n_1 x + p_1 x^2 dx = m_1 s_1 + \frac{p_1 s_1^3}{12} \\ & - \frac{s_1}{2} - \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot \delta \\ & - n_1 s_1 \delta_1 + p_1 s_1 \delta_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{s'_1}{2} - \left(\frac{s'_1}{h'_1} \right)^2 \cdot \delta \\ \text{und für Punkt B} \quad I'_1 &= \int m'_1 + n'_1 x + p'_1 x^2 dx = m'_1 s'_1 + \frac{p'_1 s'^3_1}{12} \\ & - \frac{s'_1}{2} - \left(\frac{s'_1}{h'_1} \right)^2 \cdot \delta \\ & - n'_1 s'_1 \delta'_1 + p'_1 s'_1 \delta'^2_1. \end{aligned}$$

Durch die Messung ergibt sich ein Verhältniss der Intensitäten von Punkt A und Punkt B

$$\begin{aligned} \frac{I'_1}{I_1} &= \frac{m'_1 s'_1 + \frac{1}{12} p'_1 s'^3_1 - n'_1 s'_1 \delta'_1 + p'_1 s'_1 \delta'^2_1}{m_1 s_1 + \frac{1}{12} p_1 s_1^3 - n_1 s_1 \delta_1 + p_1 s_1 \delta_1^2} \\ &= \frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12} \frac{p'_1 s'^2_1}{m'_1} - \frac{n'_1 \delta'_1}{m'_1} + \frac{p'_1 \delta'^2_1}{m'_1}}{1 + \frac{1}{12} \frac{p_1 s_1^2}{m_1} - \frac{n_1 \delta_1}{m_1} + \frac{p_1 \delta_1^2}{m_1}} \end{aligned}$$

Da δ constant $= 2.2''$ angenommen wurde, so kann man $\delta'_1 = \delta_1 = \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot 2.2''$ setzen, wenn bei beiden Messungen die Spaltweiten s gleich gross sind. Da ferner im letzten Ausdruck die Brüche im Zähler und Nenner kleine Grössen sind, so ist es erlaubt, als Annäherung Reihenentwicklung mit Weglassung höherer Potenzen anzuwenden; man erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{I'_1}{I_1} &= \frac{m'_1 \frac{s'_1}{s}}{m_1 \frac{s_1}{s}} \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{p'_1 s'^2_1}{m'_1} - \frac{p_1 s_1^2}{m_1} \right) - \delta_1 \left(\frac{n'_1}{m'_1} - \frac{n_1}{m_1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \delta_1^2 \left(\frac{p'_1}{m'_1} - \frac{p_1}{m_1} \right) \right). \end{aligned}$$

m'_1 und m_1 sind die Ordinaten der Curve i_1 in den Punkten B

und A. Früher hatte man die Beziehung $i_1 = \frac{s}{s_1} i$, also

$$i = \frac{s_1}{s} i_1; \text{ der Bruch } \frac{m'_1 \frac{s'_1}{s}}{m'_1 \frac{s_1}{s}} \text{ stellt somit das Verhältniss}$$

zweier Ordinaten der Curve i selbst vor; man erhielte demnach mittelst der hier vorausgesetzten Messungsmethode das gewünschte Endresultat mit Umgehung der Curve i_1 , wenn die 3 letzten Glieder in der Klammer nicht wären. Das Produkt

dieser 3 Glieder mit $\frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1}$ stellt den in Folge der endlichen

Spaltweite begangenen Fehler vor; derselbe reducirt sich auf

$$-\frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1} \cdot \delta_1 \cdot \left(\frac{n'_1}{m'_1} - \frac{n_1}{m_1} \right), \text{ wenn sowohl bei A als bei B}$$

die Curve i_1 innerhalb der Spaltbildbreite als geradlinig betrachtet werden darf, d. h. $p'_1 = p_1 = 0$ ist, und auch dieses Fehler-

glied verschwindet noch, wenn $\frac{n'_1}{m'_1} = \frac{n_1}{m_1}$. Der Fehler ist

um so kleiner, je grösser m'_1 und m_1 gegenüber von p'_1, p_1, n'_1 und n_1 , d. h. je flacher die Intensitätscurve verläuft; annähernd ist er proportional dem Quadrat der Spaltweite.

Ueber die absolute Grösse des begangenen Fehlers geben am besten specielle Beispiele Auskunft. Wir wählen wie auf S. 18 Punkte der Intensitätscurve des Blutspectrums, und zwar wieder I, D α , II, III und E. Die Spaltweite sei = h , also $\delta = 2''.2$. Bezieht sich I_1, m_1, n_1 und p_1 auf den Punkt D α ; I'_1, m'_1, n'_1 und p'_1 auf die andern angeführten Punkte, so erhält man für Punkt

	I	II	III	E
$\frac{1}{12} \left(\frac{p'_1 s'^1_1}{m'_1} - \frac{p_1 s_1^2}{m_1} \right)$	-0.00059	$+0.01287$	$+0.00827$	0.00000
$\delta \left(\frac{n'_1}{m'_1} - \frac{n_1}{m_1} \right)$	$+0.00506$	$+0.00620$	$+0.00518$	$+0.00758$
$\delta^2 \left(\frac{p'_1}{m'_1} - \frac{p_1}{m_1} \right)$	0.00000	$+0.00003$	$+0.00002$	0.00000
$\frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1}$	4.930	0.667	0.430	0.764
$\frac{I'_1}{I_1} - \frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1}$	-0.028	$+0.004$	$+0.001$	-0.006

Das experimentell gefundene Verhältniss der mechanischen Intensitäten zeigt also an einzelnen Stellen ziemlich beträchtliche Abweichungen vom wahren Werth. Da die vorliegende Frage praktisch von geringerem Interesse ist, so sehen wir von einer weiteren Discussion ab; das Beispiel zeigt zur Genüge, dass $\frac{I'_1}{I_1}$ und $\frac{m'_1 s'_1}{m_1 s_1}$ unter Umständen ziemlich verschiedene Grössen sein können.

Der spätern Anwendung halber stellen wir die Werthe von m , n , p und h_1 für die vorhin benützten Punkte zusammen:

	I	D_α	II	III	E
$m =$	280.0	57.0	38.0	24.7	44.0
$n = -$	6.590	— 18.500	0.280	— 0.500	4.000
$p = -$	0.262	0.000	0.776	0.329	0.000
$h_1 =$	165".7	165.0	164.8	163.5	163.0

In der Zeichnung, welcher diese Angaben entnommen sind, war die Grösse m in Millimetern abgetragen; i' wurde gleich 1 Millimeter gewählt. — Es ist selbstverständlich, dass wir durch obige Werthe von m , n und p keineswegs den richtigen Verlauf der ja gar nicht genau bekannten Curve i_1 des Blutspectrums geben wollen, sondern dass wir unsere Zahlenrechnungen mit einer gewissermassen ganz beliebigen Curve ausführen, die eben im Grossen und Ganzen Aehnlichkeit mit der des Blutspectrums hat, einzig und allein, um uns einem realen Fall möglichst anzuschliessen.

Von grösserer Wichtigkeit, als der soeben behandelte Fall ist für uns die folgende Frage: Die mechanische Intensität einer und derselben Stelle eines Spectrums wird bei verschiedenen Spaltweiten gemessen; in welcher Beziehung stehen die Messungsergebnisse zu den Spaltweiten und zur Beschaffenheit der Curve i_1 ?

Die Curve i_1 sei an dem betreffenden Punkte des Spectrums innerhalb der grössten Spaltbildbreite dargestellt durch die Gleichung $i_1 = m + n x + p x^2$; der Coordinatenursprung habe dieselbe Lage wie in der vorigen Aufgabe. Bei der Spalt-

weite s und der Spaltbildbreite s_1 wird dann eine Intensität gemessen

$$I_{1s} = \int_{-\frac{s_1}{2} - \delta_1}^{\frac{s_1}{2} - \delta_1} m + n x + p x^2 dx = m s_1 + \frac{p s_1^3}{12} - n s_1 \delta_1 + p s_1 \delta_1^2$$

und entsprechend bei der Spaltweite t , der Spaltbildbreite t_1 bei demselben m , n und p , aber mit anderem δ_2

$$I_{1t} = m t_1 + \frac{p t_1^3}{12} - n t_1 \delta_2 + p t_1 \delta_2^2$$

Nun ist aber $\delta_1 = \left(\frac{s_1}{h_1}\right)^2 \cdot 2''$ und $\delta_2 = \left(\frac{t_1}{h_1}\right)^2 \cdot 2''$, also

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{s_1^2}{t_1^2}, \quad \delta_2 = \frac{t_1^2}{s_1^2} \cdot \delta_1; \text{ damit ergibt sich}$$

$$\begin{aligned} \frac{I_{1s}}{I_{1t}} &= \frac{m s_1 + \frac{1}{12} p s_1^3 - n s_1 \delta_1 + p s_1 \delta_1^2}{m t_1 + \frac{1}{12} p t_1^3 - n \frac{t_1^3}{s_1^2} \delta_1 + p \frac{t_1^5}{s_1^4} \delta_1^2} \\ &= \frac{s_1}{t_1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12} \frac{p s_1^2}{m} - \frac{n \delta_1}{m} + \frac{p \delta_1^2}{m}}{1 + \frac{1}{12} \frac{p t_1^2}{m} - \frac{n \delta_1}{m} \cdot \frac{t_1^2}{s_1^2} + \frac{p \delta_1^2}{m} \cdot \frac{t_1^4}{s_1^4}} \end{aligned}$$

Die durch Messung mit verschiedenen Spaltweiten erhaltenen Intensitäten sind also nicht genau proportional den Spaltweiten; der bei $\frac{s_1}{t_1}$ stehende Bruch gibt ein Mass für die Abweichung von der Proportionalität. Er wird = 1, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \frac{I_{1s}}{I_{1t}} &= \frac{s_1}{t_1}, \text{ wenn } \frac{1}{12} p s_1^2 - n \delta_1 + p \delta_1^2 = \frac{1}{12} p t_1^2 \\ &\quad - n \delta_1 \frac{t_1^2}{s_1^2} + p \delta_1^2 \frac{t_1^4}{s_1^4} \text{ oder} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} p (s_1^2 - t_1^2) - n \delta_1 \left(1 - \frac{t_1^2}{s_1^2}\right) + p \delta_1^2 \left(1 - \frac{t_1^4}{s_1^4}\right) = 0.$$

Allgemein, für jedes s_1 und t_1 , ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $p = 0$ und $n = 0$, wenn also i_1 innerhalb der Spaltbildbreite constant ist, oder auch bei nicht verschwindendem n wenn $\delta_1 = 0$ genommen werden darf und zugleich $p = 0$, d. h. die Curve i_1 eine beliebige Gerade ist. Es wird um so

weniger fehlerhaft sein, Proportionalität zwischen Intensität und Spaltweite anzunehmen, je geringer die Aenderungen der Intensität innerhalb einer Spaltbildbreite sind; dieser Fall tritt beispielsweise bei breiten Absorptionsbändern im Maximum der Absorption ein, also bei Punkten, die für die Absorptionsspectralanalyse von hervorragender Bedeutung sind. Setzen wir, um einfache Resultate zu gewinnen, einen solchen Punkt bei den folgenden Betrachtungen voraus; n und p mögen für ihn so klein sein, dass im obigen Bruch die Glieder mit δ vernachlässigt werden dürfen, und zugleich sei angenommen, dass nur kleine Veränderungen der Spaltweite stattfinden, eine Annahme, die, wie wir später noch mehrfach sehen werden, nothwendig ist und die auch stets von Vierordt gemacht wird. Es sei demgemäss $t_1 = s_1 (1 - r)$, wo r ein kleiner Bruch, so ist der in dem Ausdruck für $\frac{I_{1s}}{I_{1t}}$ vorkommende, die Abweichung von der Proportionalität gebende Bruch

$$= \frac{1 + \frac{1}{12} \frac{p s_1^2}{m}}{1 + \frac{1}{12} \frac{p s_1^2}{m} (1 - r)^2} = 1 + s_1^2 \cdot \frac{p}{12 m} (2r - r^2) - s_1^4 \cdot \left(\frac{p}{12 m}\right)^2 (2r - r^2)(1 - r)^2 + s_1^6 \cdot \left(\frac{p}{12 m}\right)^3 (2r - r^2)(1 - r)^4 - \dots$$

Dieser Ausdruck gilt zunächst noch für jede Spaltweite; nimmt man aber nun, wie es der Praxis entspricht, für r den Maximalwerth 0,2, so verwandelt sich die obige Reihe in die folgende, deren Zahlencoefficienten rasch gegen 0 convergiren:

$$1 + 0.03 \frac{p}{m} s_1^2 - 0.0016 \left(\frac{p s_1^2}{m}\right)^2 + 0.000085 \left(\frac{p s_1^2}{m}\right)^3 - \dots$$

Man findet leicht, dass die Convergenz bei kleinerem r eben so vollkommen wird, wie bei $r = 0.2$. Ist vollends $\frac{p}{m}$ klein, d. h. hat man es mit einem Spectrum zu thun, das keine schroffen Intensitätsänderungen innerhalb der Spaltbildbreite darbietet, so kann man annäherungsweise setzen

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} \cdot \left(1 + s_1^2 \cdot \frac{p}{12 m} (2r - r^2)\right). \text{ Hieraus ergibt sich:}$$

Die durch Uebereinanderlagerung der Spaltbilder in einem Punkt eines Spectrums vorhandene Energie ist nicht ganz pro-

portional der Spaltweite. Bei schwach gekrümmten, wenig gegen die Abscissenaxe geneigten Intensitätscurven, also bei Spectren mit schwachem Wechsel der Intensität, ist zu dem

Verhältniss $\frac{s_1}{t_1}$ der Spaltweiten noch eine Grösse hinzuzufügen

$$= \frac{s_1}{t_1} \cdot s_1^2 \cdot \frac{p}{12m} (2r - r^2) = s_1^2 \cdot \frac{p}{12m} \cdot \frac{2r - r^2}{1 - r}.$$

Unter den genannten Umständen ist also die Abweichung von der Proportionalität dem Quadrat der Spaltweite s_1 und dem Coefficienten p direct, dem Coefficienten m umgekehrt proportional; mit wachsendem r nimmt sie zu.

Auch wenn man von der in der Praxis üblichen Beschränkung des r auf kleine Werthe absieht, kommt man zu den nämlichen Gesetzen über die Grösse der Abweichung bei flacher Curve *ii.* Der Ausdruck $(2r - r^2)(1 - r)^2$ z. B., welcher in der allgemein giltigen obigen Reihe bei s_1^4 steht, erreicht zwischen $r = 0$ und $r = 1$ bei $r = 0,3$ etwa seinen Maximalwerth, der nur wenig grösser ist als der Werth bei $r = 0,2$; die bei höheren Potenzen von s_1 stehenden Ausdrücke, wie beispielsweise $(2r - r^2)(1 - r)^4$, haben ihre Maxima für $r < 0,2$ und bewegen sich zwischen $r = 0$ und $r = 1$ überhaupt innerhalb sehr enger Grenzen. Die folgende Uebersicht liefert den Beweis: Werthe von $2r - r^2$ $(2r - r^2)(1 - r)^2$ $(2r - r^2)(1 - r)^4$ für

$r = 0.1$	0.19	0.154	0.125
0.2	0.36	0.230	0.147
0.3	0.51	0.280	0.137
0.4	0.64	0.230	0.083
0.5	0.75	0.187	0.047
0.6	0.84	0.134	0.021
0.7	0.91	0.081	0.007
0.8	0.96	0.038	0.002
0.9	0.99	0.010	0.000

Bei kleinem $\frac{p}{m}$ darf man also wie bei $r \leq 0.2$, so auch bei

grösseren Werthen von r die Abweichung von dem Verhältniss $\frac{s_1}{t_1}$ darstellen durch das eine Glied $s_1^2 \cdot \frac{p}{12m} \cdot \frac{2r - r^2}{1 - r}$. Nur ist

dabei zu beachten, dass der Factor $\frac{2r - r^2}{1 - r}$ mit zunehmendem r

sehr rasch wächst. Dies weist auf die Nothwendigkeit kleiner Variation der Spaltweiten hin. Das Quadrat von s_1 zeigt, dass man sich kleiner Spaltweiten bedienen soll; dem ist jedoch in der Praxis eine Grenze gesetzt, nicht nur durch die grössere Intensität der Lichtquelle, die dann nöthig wird, sondern auch durch den viel grössern Einfluss den alle Unregelmässigkeiten der Mikrometerschraube des Spalts gewinnen.

Den Einfluss der wechselnden Spaltbildbreite, d. h. der Grösse δ_1 auf die Abweichung von der Proportionalität kann man sehr leicht bestimmen für den Fall, dass p verschwindend klein ist. Man hat dann

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} \cdot \frac{1 - \frac{n \delta_1}{m}}{1 - \frac{n \delta_1}{m} \cdot \frac{t_1^2}{s_1^2}} = \frac{s_1}{s_1 (1-r)} \cdot \left(1 - \frac{n \delta_1}{m}\right) \left(1 + \frac{n \delta_1}{m} (1-r)^2 + \left(\frac{n \delta_1}{m}\right)^2 (1-r)^4 + \dots\right) = \frac{s_1}{t_1} - \frac{n \delta_1}{m} \frac{2r-r^2}{1-r} - \left(\frac{n \delta_1}{m}\right)^2 (1-r)(2r-r^2) + \dots$$

Vernachlässigt man bei der Kleinheit von δ_1 alle Glieder der die Abweichung gebenden Reihe ausser $\frac{n \delta_1}{m} \cdot \frac{2r-r^2}{1-r}$, so sieht man, dass bei geradliniger Curve i_1 ($p=0$) die Abweichung der Proportionalität zwischen Intensität und Spaltweite der Neigung n der Geraden i_1 und der Entfernung δ_1 direct, der Ordinate m umgekehrt proportional ist und mit r rasch wächst. δ_1 selbst ist aber proportional dem Quadrat der Spaltweite s_1 , und dies gilt also auch von der Abweichung $\frac{I_{1s}}{I_{1t}} - \frac{s_1}{t_1}$. Ihre numerische Grösse geht aus folgenden Rechnungen hervor, bei welchen s durchweg $= h = 100$ Trommeltheilen und $t = 0,8 s$ angenommen ist, und welchen die Curvenelemente von Seite 22 zu Grunde liegen. δ_1 ist überall $= \delta = 2.2''$.

Man erhält für

Punkt I.

$$\frac{1}{12} \frac{s_1^2 p}{m} = -0.000594, \quad \frac{n \delta_1}{m} = -0.000871, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} = -0.000001.$$

$$\frac{1}{12} \frac{t_1^2 p}{m} = -0.000380, \quad \frac{n \delta_1}{m} \left(\frac{t_1}{s_1}\right)^2 = -0.000557, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} \left(\frac{t_1}{s_1}\right)^4 = -0.000000;$$

hieraus $\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,0001) = 1,2501$, während das Verhältniss der Spaltweiten $= 1,2500$ ist.

Punkt D_α . Hier ist $p = 0$.

$$\frac{n \delta_1}{m} = -0,012\ 009; \quad \frac{n \delta_1}{m} \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^2 = -0,007\ 686; \text{ also}$$

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,0043) = 1,2554.$$

Punkt II.

$$\frac{1}{12} \frac{s_1^2 p}{m} = 0,012\ 869, \quad \frac{n \delta_1}{m} = 0,000\ 272, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} = 0,000028;$$

$$\frac{1}{12} \frac{t_1^2 p}{m} = 0,008\ 236, \quad \frac{n \delta_1}{m} \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^2 = 0,000\ 174, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^4 = 0,000012.$$

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,0045) = 1,2556.$$

Punkt III.

$$\frac{1}{12} \frac{p s_1^2}{m} = 0,008\ 242, \quad \frac{n \delta_1}{m} = -0,000749, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} = 0,000018;$$

$$\frac{1}{12} \frac{p t_1^2}{m} = 0,005\ 275, \quad \frac{n \delta_1}{m} \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^2 = -0,000\ 479, \quad \frac{p \delta_1^2}{m} \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^4 = 0,000007.$$

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,0032) = 1,2540.$$

Punkt E ($p = 0$).

$$\frac{n \delta_1}{m} = 0,003364; \quad \frac{n \delta_1}{m} \cdot \left(\frac{t_1}{s_1} \right)^2 = 0,002153.$$

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} (1 - 0,0012) = 1,2488.$$

Bei Punkt D_α gibt das sehr grosse n ($= -18,5$) die beträchtliche Abweichung von der Proportionalität; bei II und III dagegen tritt die Entfernung des Hilfs- vom Hauptpunkt zurück und die Krümmung verursacht hauptsächlich den Fehler. Aus allen Beispielen aber ist ersichtlich, dass es sich um Grössen handelt, die nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Sehr viel günstiger wird die Sachlage bei kleinerer Spaltweite. Nimmt man $s = 50$ Trommeltheilen und wieder $t = 0,8 s$, so

erhält man für $\frac{I_{1s}}{I_{1t}}$

bei	I	D_α	II	III	E
$= \frac{s_1}{t_1} \cdot$	$(1 - 0,0000)$	$(1 + 0,0011)$	$(1 + 0,0012)$	$(1 + 0,0008)$	$(1 - 0,0003)$
$=$	1,2500	1,2513	1,2515	1,2510	1,2496.

Es folgt hieraus wieder die Zweckmässigkeit kleiner Spaltweiten, besonders bei starker Curvenkrümmung.

Um zu zeigen, wie ungünstig sich die Verhältnisse gestalten bei schmalen und dunkeln Absorptionsbändern, wollen wir innerhalb der Spaltbildbreite eine Curve i_1 zu Grunde legen, welche in Figur 3 dargestellt ist und deren Gleichung

$$i_1 = e + k \sin \pi \left(\frac{2x}{h_1} - \frac{1}{2} \right)$$

heisst; d. h. man hat als Intensitätscurve eine Sinuslinie mit der Wellenlänge h_1 und der Amplitude k . Man erhält für die Spaltweite s_1 mit dem zugehörigen Werthe δ_1

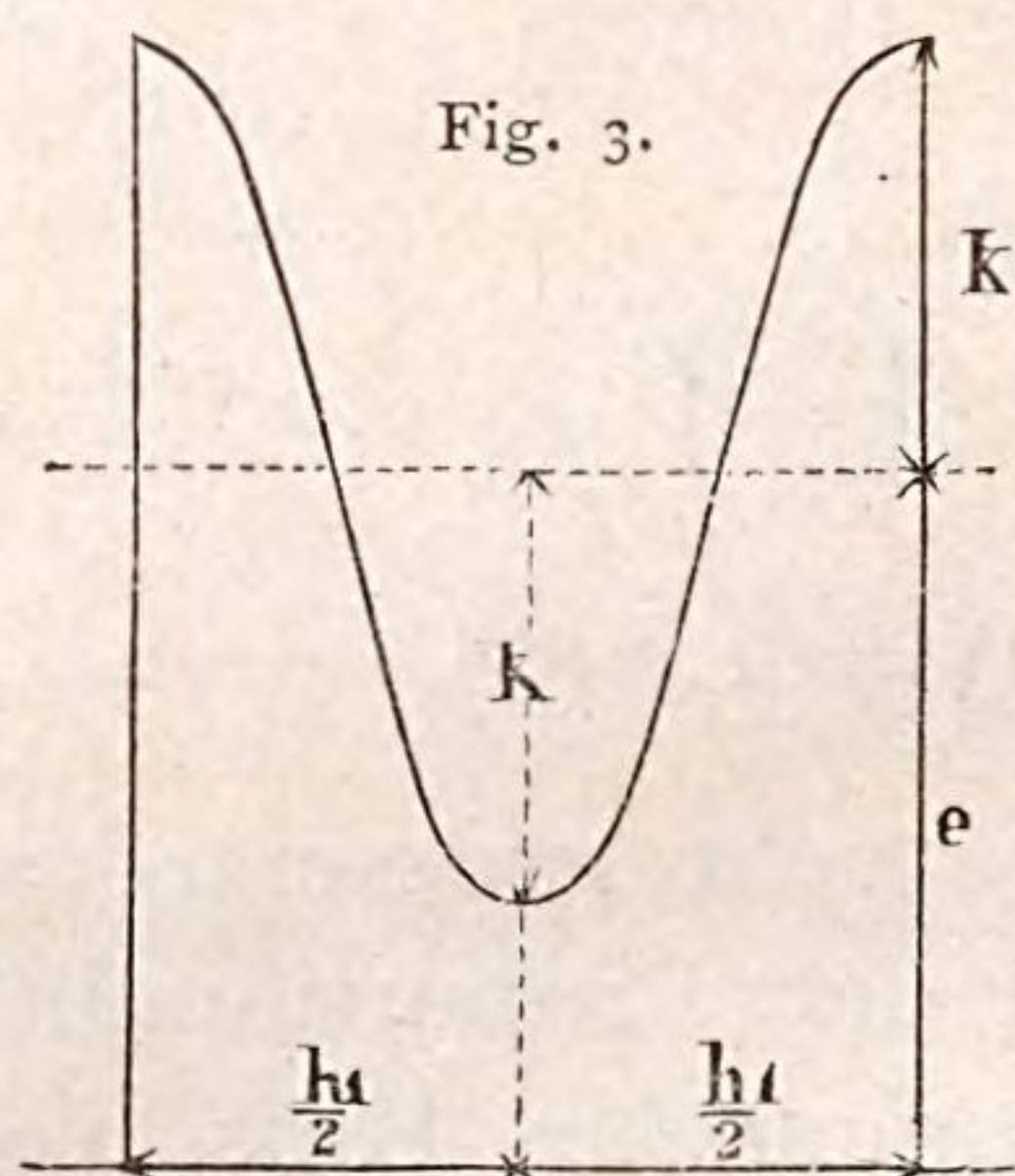
$$\frac{s_1}{2} = \delta_1$$

$$\int i_1 dx = e s_1 - \frac{k h_1}{\pi} \cos 2\pi \frac{\delta_1}{h_1} \sin \pi \frac{s_1}{h_1} \cdot \text{Mit } s_1 = h_1 = 165'' \text{ und}$$

$$-\frac{s_1}{2} = \delta_1$$

$t_1 = 0,8 s_1$ ergibt sich

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = \frac{e h_1}{0,8 e h_1 - \frac{k h_1}{\pi} \cos \left(\frac{2\pi \delta_1}{h_1} \cdot 0,64 \right) \cdot \sin (0,8 \pi)} = \frac{e}{0,8 e - 0,18683 k}.$$



Nimmt man nun hier z. B. $k = e$, d. h. ist die Mitte des Absorptionsstreifens völlig dunkel, so ergibt sich

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = 1,631 \text{ (statt } 1,250) = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,305)$$

und wenn man $e = 10 k$ gewählt wird

$$\frac{I_{1s}}{I_{1t}} = 1,280 = \frac{s_1}{t_1} (1 + 0,024).$$

In solchen extremen Fällen darf man also auch bei kleinen Spaltänderungen die Intensitäten nicht proportional den Spaltweiten setzen.

Wir setzten bisher stets die Curve i_1 als bekannt voraus und folgerten dann den Werth von I_1 ; in Wirklichkeit ist dagegen I_1 aus der Messung als bekannt anzunehmen, und man hat die Aufgabe, auf die Gestalt der Intensitätscurve i_1 zu schliessen. Wir beschränken uns darauf, einen Weg zur Lösung dieser Aufgabe anzudeuten, welcher dem Bisherigen entspricht.

Die Spaltweite sei s , so besteht nach dem Früheren die Beziehung:

$$I_{1s} = m s_1 + \frac{p s_1^3}{I_2} - n s_1 \delta_s + p s_1 \delta_s^2, \text{ wo } \delta_s = \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 \cdot 2''.$$

In dieser Gleichung sind als gegeben zu betrachten I_{1s} , s_1 und δ_s , unbekannt sind m , n und p . Beobachtet man am nämlichen Punkt des Spectrums noch mit zwei andern Spaltweiten t_1 und u , so ergeben sich die zwei weitem Gleichungen

$$I_{1t} = m t_1 + \frac{p t_1^3}{I_2} - n t_1 \delta_t + p t_1 \delta_t^2 \text{ und}$$

$$I_{1u} = m u_1 + \frac{p u_1^3}{I_2} - n u_1 \delta_u + p u_1 \delta_u^2. \text{ Aus diesen}$$

3 Gleichungen lässt sich m , n und p bestimmen; also ein Stück der Curve i_1 auffinden. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass innerhalb der grössten vorkommenden Spaltbildbreite die Curve wirklich als solche zweiten Grades betrachtet werden darf, eine Annahme, die nicht für alle Spectra zulässig ist. Man könnte sich aber in dem Fall durch Zugrundelegung einer Curve höherer Ordnung und durch Anwendung von entsprechend mehr Spaltweiten helfen. — Wir beschränken uns übrigens hinsichtlich dieser Aufgabe auf die gegebene principielle Andeutung.

Fassen wir die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen noch einmal kurz zusammen. Die den einzelnen Strahlen eines Spectrums zukommenden Intensitäten treten nur dann im Spectrum rein und unvermischt auf, wenn der Spalt unendlich schmal ist. Bei endlicher Spaltweite ist die Intensität an einer bestimmten Stelle des Spectrums nicht genau proportional der Spaltweite, sondern auch noch abhängig vom Verlauf der Curve i_1 , denn sie ist das Resultat aus einer Ueber-

einanderlagerung mehrerer benachbarter Strahlen. Die Abweichung der Curve I_1 (erhalten mit endlicher Spaltweite) von der Curve i_1 ist um so grösser, je schroffere Intensitätswechsel, je schmälere und intensivere Absorptionsstreifen ein Spectrum zeigt, und je grösser die Spaltweite ist; es ist ja z. B. eine bekannte Thatsache, dass bei einer gewissen Spaltweite die Fraunhofer'schen Linien, diese ausserordentlich schmalen und intensiven Absorptionsstreifen, ganz verschwinden. Ist die Curve i_1 bekannt, so kann man den Zusammenhang zwischen Intensität und Spaltweite leicht rechnermässig feststellen; bei Spectren ohne schroffe Wechsel der Intensität darf man aber auch als erste Annäherung die Curve I_1 , welche direct beobachtet wird, statt i_1 zu Grunde legen. Die Lamansky'sche Intensitätscurve des Sonnenspectrums z. B. müssen wir als Curve I_1 bezeichnen, denn sie wurde durch eine Spaltweite von $\frac{1}{2}$ mm gefunden; innerhalb des sichtbaren Theiles des Spectrums ändern sich die Intensitäten so gleichmässig und langsam (abgesehen von den Fraunhofer'schen Linien), dass wir unbedenklich die Curven I_1 und i_1 als übereinstimmend annehmen können. Anders ist es freilich bei den starken Absorptionsstreifen des Sonnenspectrums im Ultraroth; dort dürften sich beträchtliche Unterschiede zwischen beiden Curven herausstellen.

Bei der heutigen optischen Spectrophotometrie handelt es sich nicht um Vergleichung der Intensitäten von Strahlen verschiedener Wellenlänge in einem und demselben Spectrum, sondern es werden bekanntlich homologe Stellen zweier verschiedenen übereinanderliegenden Spectren mit einander verglichen. Um die Fehler dieser subjectiv-optischen Methode beurtheilen zu können, müssen wir uns vor Allem unsere fingirte Methode der Messung objectiver Intensitäten so arrangirt denken, dass sie im Princip mit jener übereinstimmt. Das wäre etwa dadurch zu erreichen, dass man mittelst des Doppelspalts zwei Spectren übereinander herstellt, dasjenige, dessen Intensität zu bestimmen ist und ein Normalspectrum; anstatt mit unserer Thermosäule die absolute mechanische Intensitätscurve des zu untersuchenden Spectrums zu bestimmen, suchen wir die relative mechanische Intensitätscurve beider Spectra, und zwar vergleichen wir nur homologe Punkte derselben. Die Spaltweite des einen Spectrums kann constant gehalten werden; wir werden für

dasjenige Spectrum veränderlichen Spalt wählen, welches den gleichmässigeren Verlauf seiner i_1 -Curve darbietet, und dies wird im Allgemeinen das Normalspectrum sein. Man hat dabei noch den Vorthail, dass nur Verengerungen des Spalts nothwendig sind, also eine bestimmte Maximalspaltweite festgehalten wird. Da uns die Wahl des Normallichts frei steht (abgesehen von der wichtigen Frage der Constanz desselben), so wäre es am rationellsten, ein solches zu wählen, dessen Spectrum eine Curve i_1 von constanter Ordinate hat, weil dann Spaltweite und Intensität stets proportional sind. Diese Wahl wird in praxi schwer zu treffen sein; wie gross der Fehler wird, wenn man, wie üblich, das Spectrum eines Erdöllichts oder sonst ein continuirliches Spectrum nimmt, wird aus den folgenden Untersuchungen hervorgehen. Wir setzen voraus, dass man Normal- und Absorptionsspectrum an der betreffenden Stelle annähernd gleich lichtstark machen kann durch Dämpfung des erstern vermittelt Einschaltung von Substanzen mit bekannter Absorptionskraft (nach Vierordt etwa eine Partie schwacher Rauchgläser, von welchen jedes einzelne ein Absorptionsspectrum gibt, dessen Intensität als wenig verschieden vom Normalspectrum leicht genau bestimmbar ist), so dass man dann nur äusserst geringe Spaltänderungen braucht, um an homologen Stellen beider Spectra gleiche Intensitäten zu erhalten. Ob eine solche Dämpfung immer von Werth ist, wird sich zeigen.

Wir nehmen zunächst an, dass wirklich homologe Punkte beider Spectra zur Vergleichung kommen, dass also der veränderliche Spalt nie eine einseitige Bewegung erfährt, sondern dass die von Vierordt in Wiedemann's Annalen Band 3 gegebene Einrichtung zur symmetrischen Spalterweiterung mit im Ganzen 4 Mikrometerschrauben oder rechtem und linkem Schraubengewinde angewandt werde; welchen Fehler man begeht, wenn diese Voraussetzung nicht gemacht wird, wollen wir später untersuchen.

Mit Beer nennen wir das Verhältniss der Intensität des aus einem absorbirenden Körper von der Dicke 1 austretenden homogenen Lichtbündels zur Intensität des eintretenden den Absorptionscoefficienten des Strahlenbündels. Die mechanische Intensität des Normalspectrums sei gegeben durch die Curve $i_1 = m_1 + n_1 x + p_1 x^2$, die des zu messenden Absorptionsspec-

trums durch die Curve $i_2 = m_2 + n_2x + p_2x^2$, so ist der Quotient $\frac{m_2}{m_1}$ der Absorptionscoefficient für die Stelle der Spectra, welche durch $x = 0$ angegeben ist. Wenn wir von Bestimmung des Absorptionscoefficienten reden (und entsprechend, wenn man mit Bunsen und Vierordt den Exstinctionscoefficienten einführt), so meinen wir damit stets dieses Verhältniss $\frac{m_2}{m_1}$, während wir in unsern Betrachtungen nicht die Curven i_1 und i_2 , sondern die aus ihnen hergeleiteten Werthe I_1 und I_2 vor uns haben; wir bestimmen durch Versuche nicht $\frac{m_2}{m_1}$, sondern einen im günstigsten Fall nicht viel davon verschiedenen Werth $\frac{S_1}{S_2}$.

Wenn wir nun bei einem und demselben absorbirenden Stoff für Strahlen bestimmter Wellenlänge den Absorptionscoefficienten mit verschiedenen Spaltweiten bestimmen, so wird derselbe nothwendig auch verschieden gefunden werden müssen, weil eben die Curve I_1 sowohl als I_2 andere geworden sind, letztere sich unter Umständen sogar sehr stark mit wechselnder Spaltweite geändert haben kann, als einem Spectrum mit Absorptionsstreifen angehörend.

Um die Formeln nicht zu compliciren, wollen wir von jetzt an $\delta = 0$ setzen, also Hilfs- und Hauptpunkt zusammenfallen lassen. Wir sind nach dem Früheren dazu um so eher berechtigt, als das Normalspectrum ohne alle schroffen Intensitätsänderungen angenommen werden soll, und die für die Beobachtungen wichtigsten Punkte des Absorptionsspectrums an Stellen liegen, bei welchen n klein ist. — Wenn wir den die Intensität angehenden Flächenstreifen des Normalspectrums in seiner Breite so lange ändern, bis sein Inhalt dem Streifeninhalt des Absorptionsspectrums gleich wird, so ist der dadurch erhaltene Absorptionscoefficient entsprechend dem durch das optische Verfahren gewonnenen; hätte man Instrumente, welche die mechanische Intensität anzeigen, so würde man einfach den Inhalt beider Streifen ohne alle Spaltänderung des Normalspectrums zu einander in's Verhältniss setzen und dieses Verhältniss als Absorptionscoefficient ansehen. Auch in diesem Fall ist der Absorptionscoefficient mit einem von der Spaltweite her-

rührenden Fehler behaftet, und es lässt sich leicht ein Annäherungsgesetz über die Grösse des begangenen Fehlers aufstellen. Man habe für das Normalspectrum $i_1 = m_1 + n_1 x + p_1 x^2$, also bei der Spaltweite h $I_1 = m_1 h_1 + p_1 \frac{h_1^3}{12}$, und für das Absorptionsspectrum $i_2 = m_2 + n_2 x + p_2 x^2$, somit $I_2 = m_2 h_1 + p_2 \frac{h_1^3}{12}$. Damit wird der beobachtete Absorptionscoefficient

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{m_2 + \frac{1}{12} p_2 h_1^2}{m_1 + \frac{1}{12} p_1 h_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{p_1 h_1^2}{m_1} + \frac{1}{144} \frac{p_1^2 h_1^4}{m_1^2} - \dots \right)$$

und unter der Voraussetzung von kleinen p_1 und p_2 , grossen m_1 und m_2

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{1}{12} h_1^2 \left(\frac{p_2}{m_2} - \frac{p_1}{m_1} \right) - \frac{1}{144} \frac{p_1}{m_1} h_1^4 \left(\frac{p_2}{m_2} - \frac{p_1}{m_1} \right) \right).$$

m_2 und m_1 sind die Curvenordinaten für $x = 0$, also ist $\frac{m_2}{m_1}$ der richtige Absorptionscoefficient. Die Abweichung des gefundenen vom richtigen Werth ist $= 0$, wenn entweder $p_1 = p_2 = 0$, d. h. Curve i_1 und Curve i_2 gerade Linien, oder wenn $\frac{p_2}{m_2} = \frac{p_1}{m_1}$; im Uebrigen ist der Fehler annähernd proportional dem Quadrat der Spaltweite. n_1 und n_2 kommen in dem Verhältniss $\frac{I_2}{I_1}$ gar nicht vor; hieraus folgt die Unabhängigkeit des Fehlers von diesen Coefficienten, die aber dennoch klein bleiben müssen, weil $\delta = 0$ sein soll. — Der Ausdruck $\frac{I_2}{I_1}$ gibt auch Aufschluss über den Werth einer etwaigen Dämpfung, im Falle m_1 und m_2 sehr verschieden sein sollten. In diesem Falle wird im Allgemeinen die Curve i_1 des Normalspectrums eine total andere, wegen der auswählenden Absorption des dämpfenden Rauchglases oder der sonstigen eingeschalteten dämpfenden Medien; wir wollen davon ganz absehen, und einfach annehmen, sämtliche Strahlen des Normalspectrums werden innerhalb der Spaltbildbreite in gleichem Verhältniss abgeschwächt, d. h. die Ordinaten der Curve i_1 ändern sich bei der Dämpfung proportional.

Werden alle q -mal kleiner, so heisst die Curvengleichung nach der Dämpfung

$$i'_1 = \frac{m_1}{q} + \frac{n_1}{q} x + \frac{p_1}{q} x^2, \text{ und somit}$$

$$\frac{I_2}{I'_1} = \frac{m_2 + \frac{1}{I_2} p_2 h_1^2}{\frac{m_1}{q} + \frac{1}{I_2} \frac{p_1}{q} h_1^2} = q \frac{m_2 + \frac{1}{I_2} p_2 h_1^2}{m_1 + \frac{1}{I_2} p_1 h_1^2}, \text{ also}$$

der Absorptionscoefficient

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{q I'_1} = \frac{m_2 + \frac{1}{I_2} p_2 h_1^2}{m_1 + \frac{1}{I_2} p_1 h_1^2}. \text{ In diesem Fall hätte dem-}$$

nach Dämpfung keinen Zweck.

Ändern wir die Breite des die Intensität unseres Normalspectrums gebenden Flächenstreifens, und zwar, wie stets vorausgesetzt, symmetrisch zu seiner Mittelordinate, bis Flächen-gleichheit mit dem Streifen des Absorptionsspectrums vorhanden ist, d. h. bilden wir ein Analogon zu der Vierordt'schen optischen Methode, so gestalten sich unsere Betrachtungen folgendermassen:

Man hat für den Flächenstreifen des Absorptionsspectrums

$$I_2 = m_2 h_1 + \frac{1}{I_2} p_2 h_1^3,$$

wobei h_1 wie früher die Maximalspaltbildbreite bedeutet. Das Normalspectrum dagegen liefert die Beziehung

$$I_1 = m_1 s_1 + \frac{1}{I_2} p_1 s_1^3,$$

und man hat nun die Bedingung

$$I_1 = I_2, \quad m_1 s_1 + \frac{1}{I_2} p_1 s_1^3 = m_2 h_1 + \frac{1}{I_2} p_2 h_1^3.$$

Aus dieser Gleichung dritten Grades wird die unbekannte Spaltbildbreite s_1 bestimmt; $\frac{s_1}{h_1}$ gilt dann als Absorptionscoefficient,

während eigentlich $\frac{m_2}{m_1}$ als solcher genommen werden muss.

Der genaue Werth von s_1 ist durch einen complicirt gebauten, nicht übersichtlichen Ausdruck gegeben, wir begnügen uns daher mit dem Näherungsergebniss, das wir mit $p_1 = 0$ erhalten:

diese Annahme stimmt überdies zu den Anforderungen, welche wir an ein Normalspectrum weiter oben stellten, wenn bei ihm Spaltweite und Intensität proportional sein sollen. Dann hat man die Gleichung

$$m_1 s_1 = m_2 h_1 + \frac{1}{12} p_2 h_1^3; \text{ woraus}$$

$$\frac{s_1}{h_1} = \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_1}, \quad \frac{s_1}{h_1} - \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_1} = F.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung stellt den Fehler des gefundenen Absorptionscoefficienten vor. Wie man sieht, ist derselbe um so kleiner, je geringer die Krümmung der Curve i_2 und je grösser die Intensität m_1 des Normalspectrums ist. Auch hier wächst der Fehler proportional dem Quadrat der Maximalspaltweite, dagegen ist er ganz unabhängig von m_2 . Mit $p_2 = 0$ erhält man den genauen Absorptionscoefficienten, also nur dann, wenn beide Curven, sowohl i_1 als i_2 , als Gerade innerhalb der Spaltbildbreite betrachtet werden dürfen. Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass die Coefficienten n_1 und n_2 gar nicht in Betracht kommen, und dass das Product $p_2 h_1^2$ eine geometrische Deutung zulässt; dasselbe ist ein Ordinatenstück zwischen der Berührungslinie der Curve i_2 im Punkt $x = 0$ und der Curve i_2 selbst. Hinsichtlich des Vorzeichens des Fehlers F ersieht man aus der Formel, dass man den Absorptionscoefficienten zu gross findet, wenn die Curve i_2 an der betreffenden Stelle ihre concave Seite nach oben, zu klein, wenn sie dieselbe nach unten kehrt.

Dämpft man das Normalspectrum, so dass man statt m_1 die Grösse $\frac{m_1}{q}$ erhält, so ergibt sich der Absorptionscoefficient

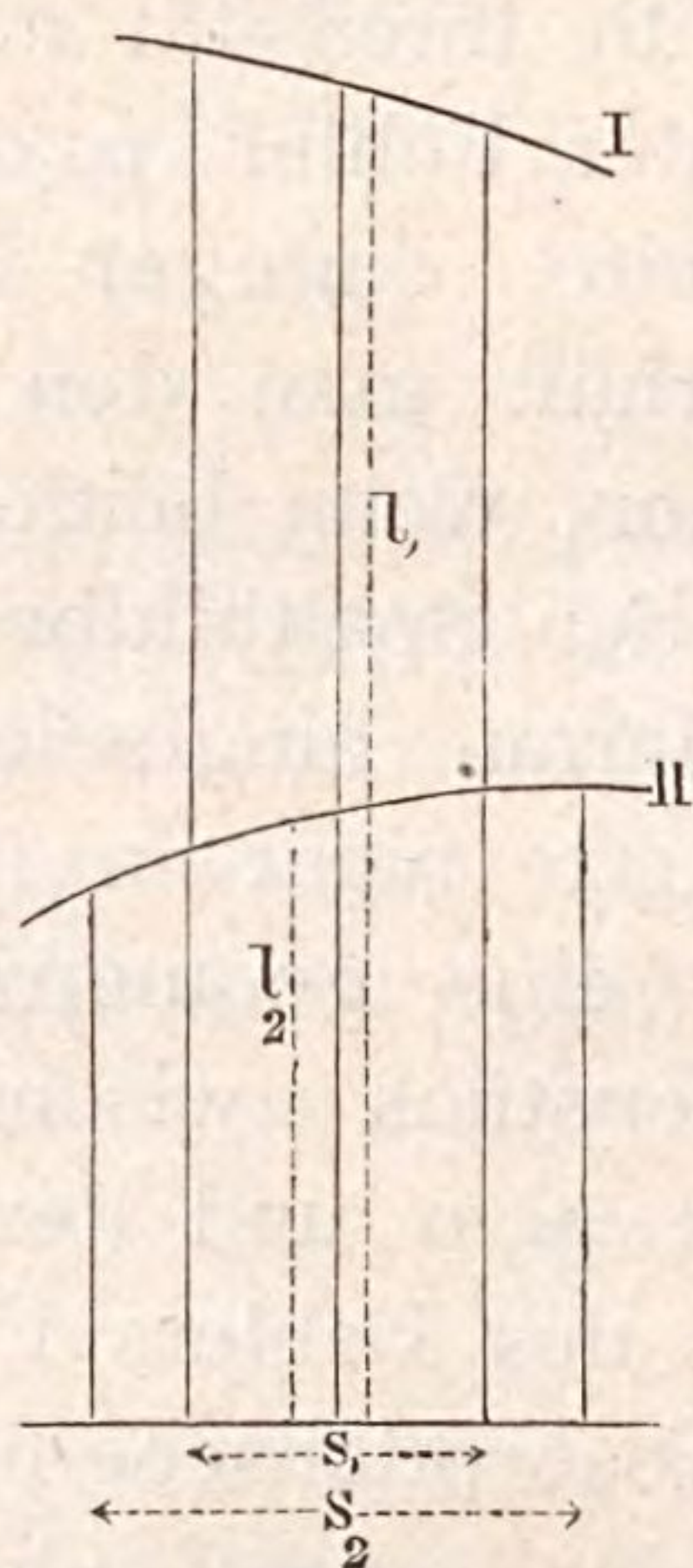
$$= \frac{1}{q} \left(\frac{m_2}{\frac{m_1}{q}} + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{\frac{m_1}{q}} \right) = \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_1},$$

also genau so gross wie ohne Dämpfung. Auch hier wird demnach durch Dämpfung keine genauere Bestimmung des Absorptionscoefficienten erlangt. Nicht ganz zum nämlichen Resultat kommt man bei Berücksichtigung des hier überall vernachlässigten δ und δ_s , doch ist der Unterschied nicht gross, weil δ und δ_s sehr klein sind. Will man wenigstens bei Curve i_2 den Coefficienten n_2 nicht sehr klein nehmen, so

wird $F = \frac{p_2 h_1^2}{12 m_1} - \frac{n_2 \delta}{m_1}$; hinsichtlich des Werthes der Dämpfung ergibt sich das nämliche Resultat wie oben.

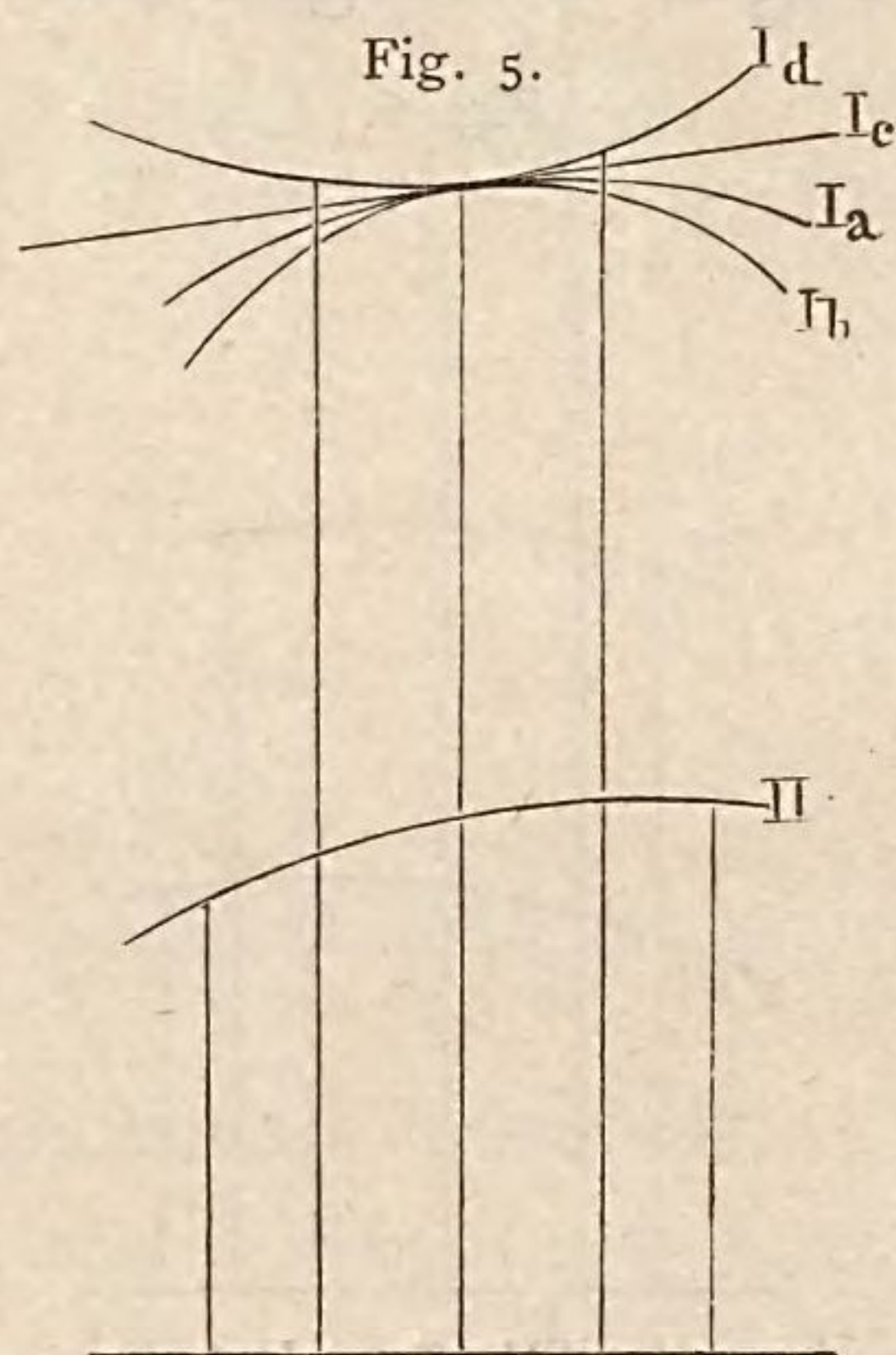
Bei geradliniger Curve i_1 ist also stets das Verhältniss $\frac{m_1}{m_2}$ für die Genauigkeit der Bestimmung des Absorptionscoefficienten unwesentlich; auch wenn m_1 gross gegen m_2 ist, braucht man keine Dämpfung des Normalspectrums, weil seine Intensität stets proportional der Spaltweite bleibt. Wie gestaltet sich aber die Sachlage bei stärker gekrümmtem Normalspectrum?

Fig. 4.



In Figur 4 sei I die Curve i_1 , II die Curve i_2 , s_1 und s_2 seien die Streifenbreiten des Normal- und des Absorptionsspectrums, m_1 und m_2 die Mittenordinaten der Flächenstreifen, also $\frac{m_2}{m_1}$ der wahre Absorptionscoefficient; die mittleren Höhen der Streifen seien l_1 und l_2 , so ist, wenn I_1 und I_2 die gleichen Flächeninhalte der Streifen sind, $I_1 = I_2 = s_1 l_1 = s_2 l_2$, oder man findet als Absorptionscoefficient aus dem Versuch $\frac{s_1}{s_2} = \frac{l_2}{l_1}$. Der Absorptionscoefficient wird also richtig befunden, wenn zufällig $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1}$. Denkt man sich nun z. B. m_1 , m_2 und l_2 gegeben, so kann man aus der letzten Gleichung ein l_1 bestimmen, das seinerseits aus der Beziehung $I_2 = s_1 l_1$ das zugehörige s_1

ergibt. Jeder Streifen einer beliebigen Curve I nun, welcher die Mittenordinate m_1 , die Breite s_1 und das Ordinatenmittel l_1 hat, ermöglicht für diese Spectralstelle völlig genaue Auffindung des Absorptionscoefficienten; eine solche Curve I ist aber im Uebrigen noch völlig unbestimmt. Oder umgekehrt, es lässt sich im Voraus gar nicht sagen, ob man nicht bei gegebenen Curven I und II für eine bestimmte Spaltweite den richtigen Absorptionscoefficienten findet; es kann diese Richtigkeit eintreten auch bei beliebiger endlicher Spaltweite und auch bei ganz beliebigem Verhältniss der Intensität des Normalspectrums zur Intensität des Absorptionsspectrums. Nimmt man sehr kleine Spaltweiten s_1 und s_2 , so werden innerhalb der Streifenbreite die Curven I und II ziemlich geradlinig verlaufen; man hat zwei Trapeze mit gleichem Inhalt und für dieselben ist die mittlere Höhe mit der Mittenordinate identisch, der Absorptionscoefficient wird genau gefunden. Ist die Proportion $\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1}$ nicht erfüllt, so erhält man aus der Beobachtung auch nicht den richtigen Absorptionscoefficienten; die Abweichung vom wahren Werth kann jede beliebige Grösse erreichen je nach der Beschaffenheit der Curven I und II.

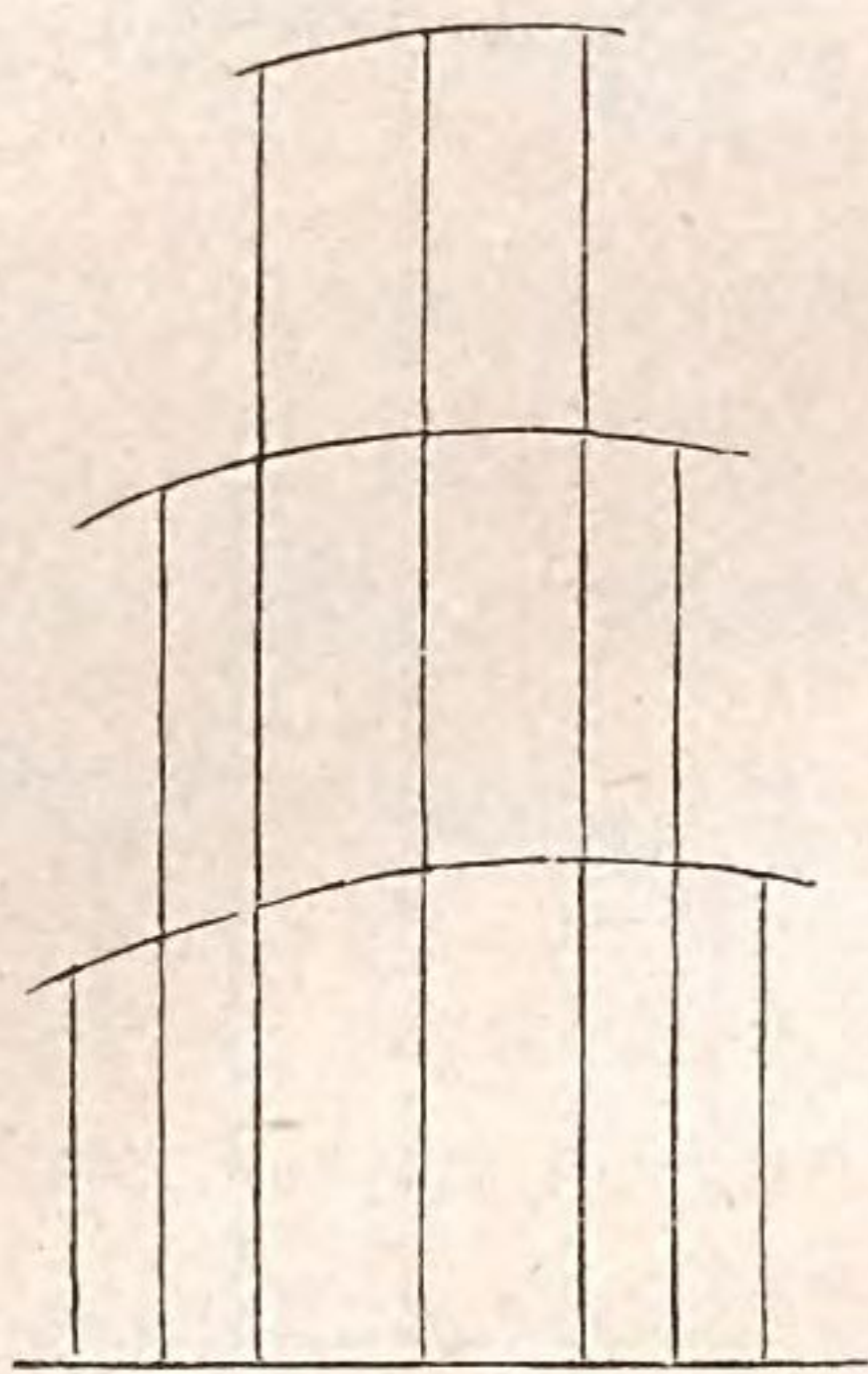


Nimmt man das Stück der Curve II innerhalb einer Spaltbildbreite als gegeben an, so dass die mittlere Höhe des Streifens bekannt ist, so kann man die Gestalt der Curve I noch variiren lassen und zusehen, wie sich dann der Absorptionscoefficient ändert. Curve II habe die Form wie sie Figur 5 zeigt, mit der

hohlen Seite nach unten, dann ist $l_2 < m_2$, und wenn der Absorptionscoefficient völlig genau gefunden werden soll, muss also auch $l_1 < m_1$ werden; das wird z. B. stattfinden können, wenn die Intensitätscurve des Normalspectrums auch hohl nach unten ist, etwa die Form I_a hat. Für Curve I_b wird die mittlere Höhe l_1 jedenfalls kleiner als für I_a , also der gefundene Absorptionscoefficient grösser als der richtige. Ist I_c eine Gerade, so wird $l_1 = m_1$, also der aus der Beobachtung hervorgehende Coefficient kleiner als der wahre; nimmt man I_d nach oben hohl, so wird sogar $l_1 > m_1$, es tritt derselbe Fall ein wie bei I_c .

Ist die Curve des Normalspectrums geradlinig, so erhält man bei sehr verschiedener Grösse von m_1 und m_2 durch Dämpfung nach dem Früheren genau denselben Werth des Absorptionscoefficienten, wie ohne solche; die Abweichung des gefundenen Werthes vom wahren hängt dabei nur von der Form der Absorptionsspectrumcurve ab. Dämpft man ein intensives Normalspectrum mit gekrümmter Intensitätslinie, so wird der Flächenstreifen, welcher die Intensität an einer Stelle des Spectrums angibt, breiter und es werden noch weitere Partien der Curve in Mitleidenschaft gezogen. Hat dieselbe nun aber die Form, welche in Figur 6 dargestellt ist (hohl nach unten),

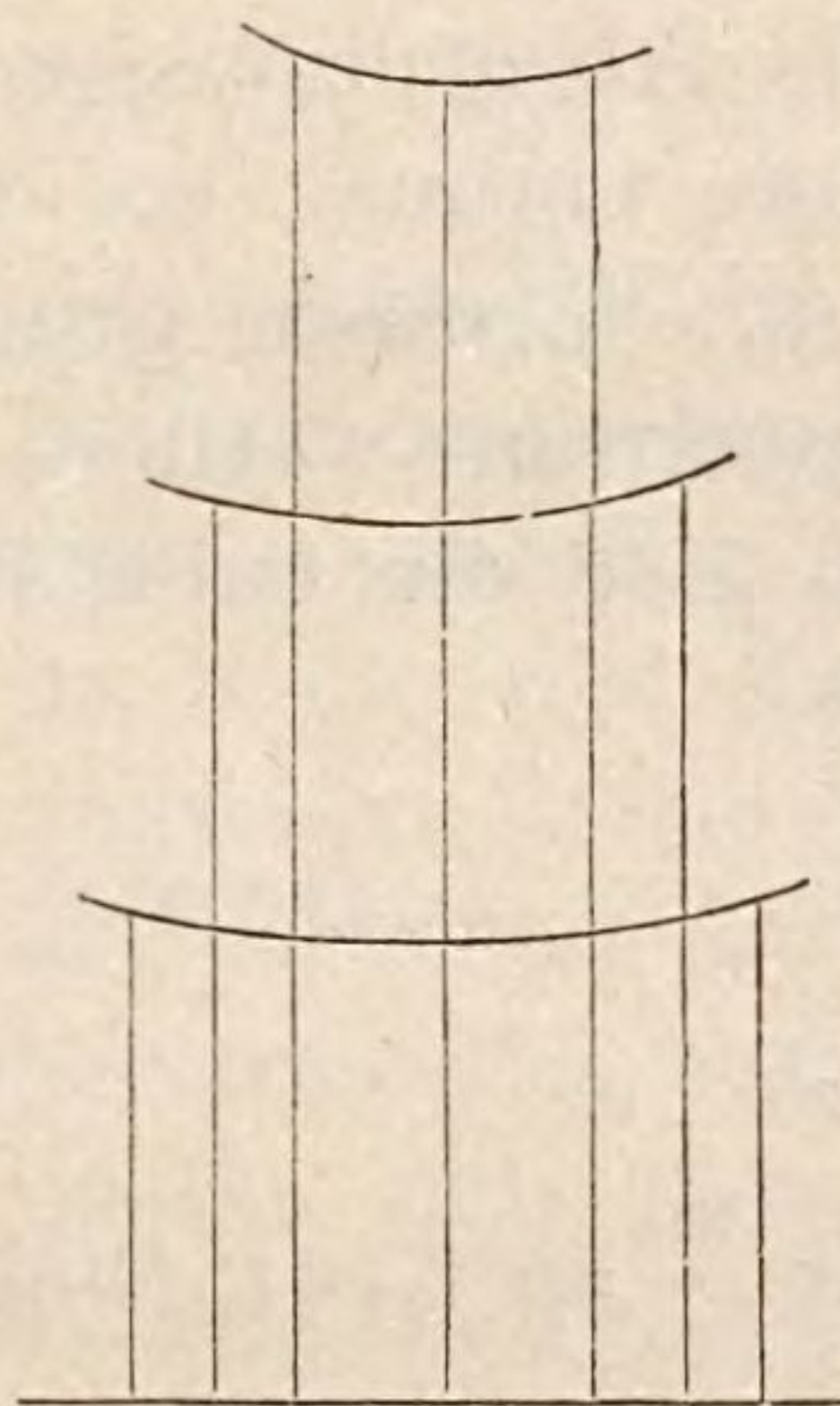
Fig. 6.



so wird durch das weitere Einbeziehen von Curventheilen die mittlere Höhe des in Betracht kommenden Curvenstücks verhältnissmässig kleiner, und also, da diese Höhe im Nenner des Ausdrucks $\frac{l_2}{l_1}$ vorkommt, der Absorptionscoefficient grösser. Die ursprüngliche, nicht durch Dämpfung veränderte Curve

des Normalspectrums kann aber unter Umständen den wahren Coefficienten ergeben haben; in dem Fall würde jetzt durch Dämpfung ein schlechteres Resultat erhalten. Würde dagegen ohne Dämpfung der Coefficient zu klein gefunden, so kann man es durch passende Dämpfung dahin bringen, dass er richtig wird; es kommt aber stets auf die Gestalt der Curven I und II im speciellen Falle an, und a priori lässt sich kein allgemein giltiges Urtheil über den Werth der Dämpfung geben. — Ist die Curve I nach oben hohl (Figur 7), so werden durch Dämpfung Curvenstücke einbezogen, welche eine verhältnissmässig grössere mittlere Höhe zur Folge haben, und es wird, überall die nach unten hohle Form von II vorausgesetzt, der Absorptionscoefficient hiedurch kleiner als er ohne Dämpfung gefunden würde. Wird er also, wie es bei den Verhältnissen von Figur 7 nach Obigem nicht unwahrscheinlich ist, schon ohne Dämpfung zu klein gefunden, so wird der Fehler durch Anwendung von Rauchgläsern noch vermehrt.

Fig. 7.



Es sei übrigens nochmals bemerkt, dass sich allgemein nichts über den Werth der Dämpfung sagen lässt; man müsste vielmehr vorläufige Bestimmungen ohne Dämpfung des Normalspectrums ausführen, und nun aus der gefundenen, annähernd richtigen Curve i_1 schliessen, wo man dämpfen sollte und wie viel. — Wir wollen noch hinzufügen, dass sich Dämpfung sehr nützlich erweisen kann, wenn man eine stärker gekrümmte Curve i_1 hat. Man kann dann den schädlichen Einfluss der

Krümmung eliminiren, wenn es gelingt, ein dämpfendes Medium zu finden, das die Ordinaten der Curve i_1 nicht alle im gleichen Verhältniss vermindert, sondern in einem von Ort zu Ort variablen, den lokalen Umständen angepassten.

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass alle diese Resultate nur unter der Voraussetzung symmetrischer Verschiebung beider Spaltränder nach rechts und nach links hin gelten.

Wir schliessen den theoretischen Auseinandersetzungen über die Bestimmung des Absorptionscoefficienten einige ohne Näherungsformeln berechneten Zahlenbeispiele an. Als Normalspectrum nehmen wir das Sonnenspectrum Figur 2a; das schon mehrfach erwähnte Spectrum des Bluts Figur 2b sei den Untersuchungen als Absorptionsspectrum zu Grunde gelegt.

Absorptionscoefficient für Punkt I des Blutspectrums. Die Gleichung der Intensitätscurve i_2 in der Nähe von Punkt I ist $i_2 = 280.0 - 6.590 x - 0.262 x^2$. Für den entsprechenden Punkt des Normalspectrums hat man

$$i_1 = 324.5 - 2.470 x + 0.006 x^2.$$

Setzt man für das Absorptionsspectrum volle Spaltweite $h = 100$ Trommeltheilen voraus, so ergibt sich aus obiger Gleichung $I_2 = 773.26$. Ebenso gross muss der Flächenstreifen I_1 des Normalspectrums werden; zur Bestimmung seiner Spaltbildbreite hat man also die cubische Gleichung

$$773.26 = \int_{-\frac{s_1}{2}}^{+\frac{s_1}{2}} (324.5 - 2.470 x + 0.006 x^2) dx.$$

Man findet aus ihr $\frac{s_1}{2} = 1.191'$, während $\frac{h_1}{2} = 1.381'$ ist; somit der aus der Beobachtung hervorgehende Absorptionscoefficient $= 0.8621$. Der richtige Werth für Punkt I ergibt sich $= \frac{280.0}{324.5} = 0.8629$.

Punkt II. Die Curve i_2 hat die Gleichung $i_2 = 38.0 + 0.28 x + 0.776 x^2$, während das Normalspectrum an der entsprechenden Stelle gegeben ist durch

$$i_1 = 293.0 - 1.72 x - 0.016 x^2.$$

Man erhält analog dem Verfahren bei Punkt I eine cubische Gleichung, welche einen Absorptionscoefficienten $= 0.1314$ liefert, während der wahre Werth $= \frac{38.0}{293.0} = 0.1297$ ist.

Gibt man dagegen dem Absorptionsspectrum nur eine Spaltweite $h = 50$ Trommeltheilen, so findet man 0.1301 , also eine vom richtigen Werth nur wenig abweichende Grösse.

Dämpft man das Normalspectrum auf $\frac{1}{6}$ seiner Intensität, so dass man hat

$$i_1 = 48.83 - 0.287 x - 0.0027 x^2,$$

so erhält man mit $h = 100$ den Absorptionscoefficienten $\frac{1}{6} \cdot 0.78828 = 0.1314$, also genau denselben Werth wie ohne Dämpfung.

Punkt III. $i_2 = 24.7 - 0.50 x + 0.392 x^2$; $i_1 = 251.0 - 2.6 x - 0.12 x^2$. Mit $h = 100$ Trommeltheilen für das Absorptionsspectrum ergibt sich der Absorptionscoefficient 0.0994 statt 0.0984 . Ein besseres Resultat ergibt sich mit $h = 50$, nämlich 0.0986 statt 0.0984 . Dämpft man das Normalspectrum auf $\frac{1}{7}$, so findet man genau denselben Werth wie ohne Dämpfung, weil in der Nähe von III wie auch bei II das Normalspectrum nahezu geradlinig verläuft. — Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man die Rolle des Normal- und des Absorptionsspectrums im vorliegenden Falle vertauscht. Gibt man nämlich dem erstern die Spaltweite 100 und öffnet dagegen den Spalt des Absorptionsspectrums bis zur Gleichheit der Flächenstreifen I_1 und I_2 , so ergibt sich der Coefficient 0.1443 statt 0.0984 ; da jedoch nur Spaltverengungen des Normalspectrums zugelassen sind, so ist dieser Fall ohne praktische Bedeutung. Eine Dämpfung des Normalspectrums auf $\frac{1}{10}$ und nachherige Spaltänderung am Absorptionsspectrum hätte hier zur Folge, dass man einen weit bessern Werth fände, nämlich 0.0994 , also dieselbe Grösse, die sich bei Spaltänderung des Normalspectrums ergab.

Wenn aus allen vorhergehenden Betrachtungen folgt, dass starke Spaltänderungen die Bestimmung des Absorptionscoefficienten nicht wesentlich beeinflussen, sobald nur überhaupt kleine Spaltweiten angewandt werden und Spectra mit schroffen Uebergängen ausgeschlossen sind, und wenn nun hieraus der Schluss gezogen wird, dass starke Absorption nicht nothwendig die Anwendung von Dämpfung nach sich zieht, so gilt das doch Alles nur unter der Voraussetzung symmetrischer Spaltänderung. Unsere Untersuchung gilt aber nicht für die frühere übliche Methode einseitiger Spaltänderung.

Bei symmetrischer Spaltänderung bleibt die Mitte des Spaltbilds jeder Wellenlänge am nämlichen Ort; bei einseitiger Aenderung dagegen verschiebt sich diese Mitte, weil der eine Rand des Spaltbilds sich bewegt, der andere fest bleibt. Die Mittellinie des Spaltbilds einer bestimmten Wellenlänge gibt uns aber die Ordinate unserer Curve i_1 ; es wird demnach durch einseitige Aenderung der Spaltweite die ganze Curve i_1 längs der Abscissenaxe verschoben. Durch Verschiebung der Spaltmitte fallen die Strahlen unter einem andern Winkel auf's Prisma, wodurch die Ablenkung der Strahlen bestimmter Wellenlänge eine etwas andere wird. Es ändert sich hiedurch die Form der Curve i_1 ein wenig, aber jedenfalls so unwesentlich, dass man davon absehen kann. Als Wirkung der einseitigen Spaltänderung bleibt also die Verschiebung der Curve i_1 längs der Abscissenaxe in ihrer früheren Gestalt. Hat man es nur mit einem Spectrum zu thun, an dem man absolute Messungen anstellt, so ist es ganz gleich, ob man bei nöthig werdender Spaltänderung einseitig oder symmetrisch ändert, wenn man das Intensitätsmessinstrument nur stets auf die Spaltbildmitte der jeweilig in Betracht kommenden Wellenlänge einstellt.

Anders bei der Vierordt'schen Methode der Absorptionsspectralanalyse. Da hat man zwei Spectra übereinander; das Absorptionsspectrum mit constanter, das Normalspectrum mit variabler und zwar einseitig veränderlicher Spaltweite. Bei der Veränderung verschiebt sich die Intensitätscurve des Normalspectrums um die halbe Spaltbildänderung, und die übereinanderliegenden Stellen der Curven i_1 und i_2 entsprechen nicht mehr gleichen Wellenlängen. Um richtig zu verfahren, müsste man auch wieder auf entsprechende Spaltbildmitten einstellen,

Spaltbildbreite abtragen und erhielte dann einen Flächenstreifen der verschobenen Curve, der ein Mass für die Intensität auf EF_2 bildete. Diesen Flächenstreifen kann man auch leicht in der nicht verschobenen ursprünglichen Curve i_1 auffinden, wenn man die Ordinate EF_2 auf die unverschobene Curve überträgt; GH sei das Resultat dieser Uebertragung, also $GH = EF_2$ und $EG = EE_1 = \frac{1}{2} DD_1$. Von GH müsste man jetzt nach links und rechts die halbe neue Spaltbildbreite abtragen; dieselbe ist aber $= AE_1$, und da $AE = ED$, $EE_1 = EG$, so ist $AE_1 = GD$. Um also nach einseitiger Verengerung der Spaltweite die längs der alten Mittellinie EF gemessene Intensität zu erhalten, hat man einfach vom alten beweglichen Spaltbildrand aus die neue Spaltbildbreite nach dem Innern des Streifens abzutragen; der hiedurch erhaltene neue Flächenstreifen, dessen Breite $=$ der neuen Spaltbildbreite, dessen eine Endordinate der allein zu ändernde Spaltbildrand, gibt die gesuchte Intensität. — Bei Spalterweiterung gilt ganz das nämliche Verfahren; der neue Streifen wird hiebei einfach breiter als der alte.

Man sieht nun leicht, dass ein Unterschied stattfindet, je nachdem die Spaltänderung durch Bewegung der einen oder der andern Spaltkante stattfindet, dass dieser Unterschied im Allgemeinen um so grösser ist, je grösser die Spaltänderung und je stärker der Intensitätswechsel innerhalb der Spaltbildbreite.

Zur Abkürzung des Ausdrucks wollen wir im Folgenden unter »rechtsseitiger, linksseitiger Aenderung« stets die einseitige Verschiebung des rechten, linken Spaltbildrands verstehen; »rechtsseitiger, linksseitiger, symmetrischer Coefficient« soll bedeuten den Absorptionscoefficienten, der durch einseitige Aenderung des rechten, linken Spaltbildrands, bzw. durch symmetrische Aenderung beider Ränder gewonnen wurde. — Sind die Verhältnisse wie in Figur 8, so ist leicht einzusehen, dass der rechtsseitige Coefficient kleiner, der linksseitige grösser gefunden wird als der symmetrische. Allgemein, man erhält einen zu grossen Absorptionscoefficienten (im Vergleich mit dem symmetrischen) bei einseitiger Aenderung des Spaltbildrandes, der gegen die kleinere Ordinate der Intensitätscurve hin liegt und umgekehrt, wenn die Curve i_1 innerhalb der Spaltbildbreite

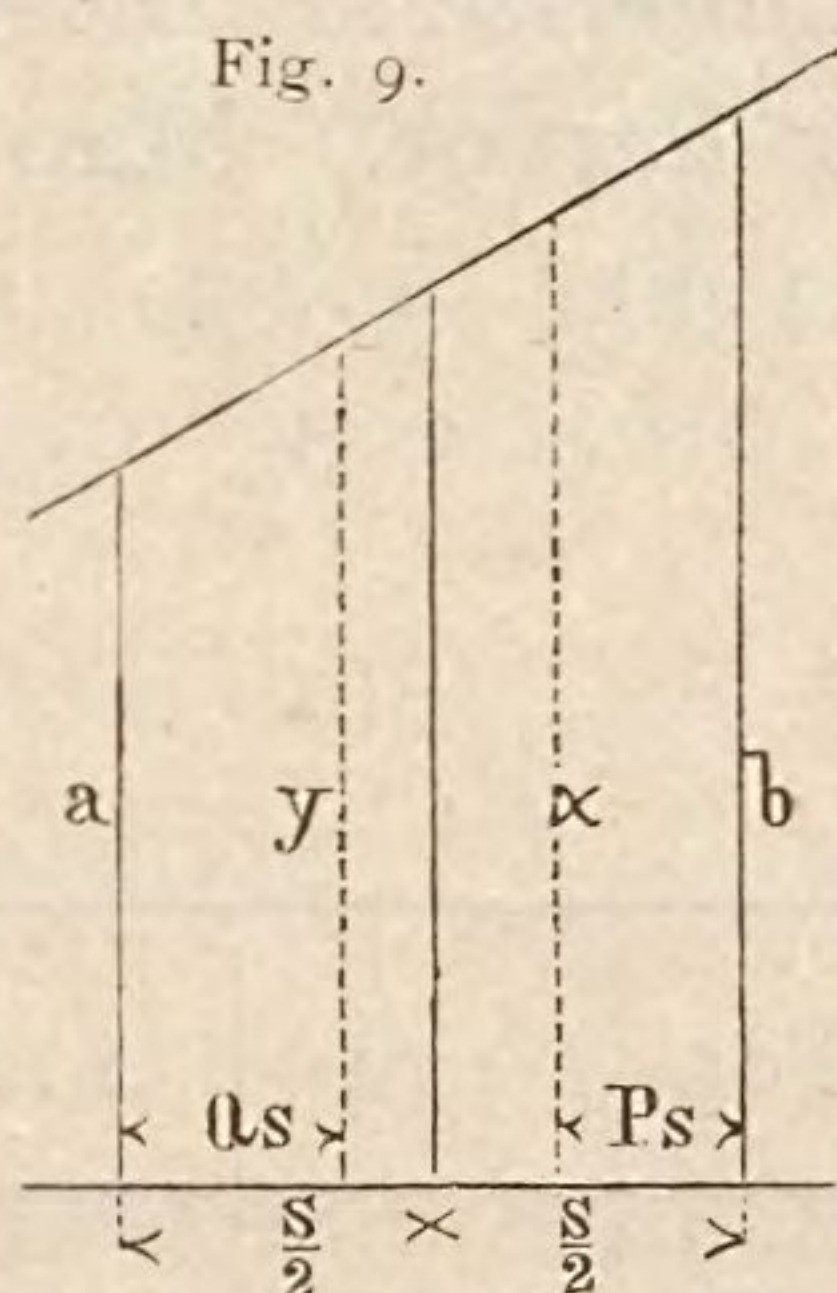
stetig steigt oder stetig fällt; liegt dagegen ein Intensitäts-
 { Maximum
 { Minimum innerhalb der Breite des Spaltbilds, so erhält man

bei rechtseitiger und bei linksseitiger Aenderung einen { grössern
 { kleinern Coefficienten als bei symmetrischer.

Wir erörtern zunächst eingehend den wichtigsten Fall einer innerhalb der Spaltbildbreite geradlinig verlaufenden Curve i_1 . Die volle Spaltbildbreite sei $= s$, die bei symmetrischer Aenderung mit der Bedingung $I_1 = I_2$ erhaltene $= N \cdot s$, also der symmetrische Absorptionscoefficient $= N$. Wie Fig. 9 zeigt, seien a und b die Curvenordinaten für $x = -\frac{s}{2}$ und

$x = +\frac{s}{2}$, P sei der rechtsseitige, Q der linksseitige Coefficient. Der Flächenstreifen bei symmetrischer Aenderung hat den Inhalt $\frac{N \cdot s}{2} (a + b)$, also ergibt sich die Grundlinie $P \cdot s$ des rechtsseitigen Trapezes aus der Gleichung

$$\frac{x + b}{2} P s = \frac{N s (a + b)}{2}, \text{ oder } (x + b) P = (a + b) N.$$



Nun ist aber

$$x = b - \frac{b - a}{s} P s, \text{ und hiemit ergibt sich}$$

$$P = \frac{b - \sqrt{N(b^2 - a^2) + b^2}}{b - a}. \text{ Ebenso ist}$$

$$\frac{y + a}{2} \cdot Q s = \frac{N s (a + b)}{2} \text{ und } y = a + \frac{b - a}{s} \cdot Q s, \text{ woraus}$$

$$Q = \frac{-a + \sqrt{N(b^2 - a^2) + a^2}}{b - a}.$$

Q.

$b = a \times$	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
N = 1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.9	0.900	0.900	0.902	0.904	0.907	0.911	0.913	0.915
0.8	0.800	0.800	0.804	0.807	0.814	0.819	0.824	0.828
0.7	0.700	0.700	0.704	0.710	0.718	0.726	0.733	0.739
0.6	0.600	0.600	0.606	0.611	0.621	0.630	0.638	0.646
0.5	0.500	0.500	0.506	0.512	0.522	0.532	0.541	0.549
0.4	0.400	0.400	0.406	0.411	0.422	0.432	0.441	0.449
0.3	0.300	0.300	0.304	0.310	0.318	0.329	0.337	0.345
0.2	0.200	0.200	0.204	0.208	0.215	0.223	0.229	0.236
0.1	0.100	0.100	0.102	0.104	0.109	0.113	0.117	0.121
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Hieraus findet man in Einheiten der dritten Decimale

$$N - P = F_P$$

$$Q - N = F_Q$$

$b = a \times$	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
N = 1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9	0	0	2	4	9	13	17	21	0	0	2	4	7	11	13	15
0.8	0	0	4	8	16	23	30	36	0	0	4	7	14	19	24	28
0.7	0	0	4	10	20	29	37	45	0	0	4	10	18	26	33	39
0.6	0	0	6	12	22	32	41	49	0	0	6	11	21	30	38	46
0.5	0	0	6	12	22	32	41	49	0	0	6	12	22	32	41	49
0.4	0	0	6	11	22	30	39	46	0	0	6	11	22	32	41	49
0.3	0	0	4	10	19	26	33	39	0	0	4	10	18	29	37	45
0.2	0	0	4	7	14	19	24	28	0	0	4	8	15	23	29	36
0.1	0	0	2	4	8	11	13	15	0	0	2	4	9	13	17	21
0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Aus diesen Tabellen folgt nun zunächst, dass P und Q in entgegengesetzter Richtung von N abweichen, dass für $N = 1$ und $N = 0$ auch $P = Q = N$ bei jedem Verhältniss $\frac{b}{a}$, und dass $N - P$ und $Q - N$ Maxima erreichen für $N = 0.5$. Ferner zeigt sich, dass bei einem gegebenen Verhältniss $\frac{b}{a}$ der Werth $F_{P,N} = F_{Q,(1-N)}$ ist.

Den genauen Werth von N für das Maximum von F_P findet man aus der Bedingung

$$F_P = N - \frac{b - \sqrt{b^2 - N(b^2 - a^2)}}{b - a} = \max., \quad 0 = \frac{dF_P}{dN}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{b - a} \frac{-(b^2 - a^2)}{\sqrt{b^2 - N(b^2 - a^2)}},$$

nämlich $N = \frac{b^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{4} \frac{b + a}{b - a}$, und $F_{P \max.} = \frac{b - a}{4(b + a)}$; und daraus ergeben sich die Zahlenwerthe

$b = a \times$	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$F_{P \max.} =$	0	0	6	12	23	33	42	50

(in Einheiten der dritten Dec.)

bei $N = 0.500 \ 0.501 \ 0.506 \ 0.512 \ 0.523 \ 0.532 \ 0.542 \ 0.550$ also stets in der Nähe von $N = 0.5$. Man bekommt somit das schlechteste Resultat bei einseitiger Spaltänderung, wenn die Intensität des Absorptionsspectrums etwa halb so gross ist als die des Normalspectrums; es macht sich dabei schon bei sehr flacher Intensitätscurve des Normalspectrums ($b = 1.05a$) eine beträchtliche Abweichung in der dritten Decimale des Absorptionscoefficienten geltend. Hieraus folgt nun eine wichtige Regel in Bezug auf die Dämpfung eines intensiven Normalspectrums. Die Differenz zwischen dem symmetrischen und dem einseitigen Coefficienten wird $= 0$ bei Gleichheit der Intensität des Normal- und des Absorptionsspectrums, oder auch wenn das Normalspectrum sehr viel intensiver ist als das Absorptionsspectrum. Man muss also bei einseitiger Aenderung einen dieser 2 Fälle realisiren; und hat sich hauptsächlich davor zu hüten, dass das Normalspectrum etwa doppelt so hell ist als das Absorptionsspectrum. Um so mehr ist diese Regel zu beachten, je steiler die Curve i ist. Mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Ungleichförmigkeiten der Spaltschraube und auf die Schwierigkeiten bei der Messung und Vergleichung kleiner Intensitäten ist es am richtigsten, durch Dämpfung Intensitätsgleichheit am betreffenden Orte herzustellen.

Für $F_{Q \max.}$ und das zugehörige N erhält man auf ganz analoge Weise eine Tabelle wie für $F_{P \max.}$; die Werthe von $F_{Q \max.}$ sind gleich denen von $F_{P \max.}$; im übrigen ergibt sich

$$N = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} + \frac{1}{4} \frac{b + a}{b - a}, \text{ oder bei}$$

$b = a \times$	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$N =$	0.500	0.499	0.494	0.488	0.477	0.468	0.458	0.450;

Also auch hier das Maximum der Differenz des symmetrischen und des einseitigen Coefficienten etwa bei $N = 0.5$. die vorhin gegebenen Bemerkungen über Dämpfung behalten ihre Giltigkeit.

Aus den Tabellen für F_P und F_Q ist nun deutlich zu ersehen, dass das arithmetische Mittel aus P und Q sehr nahezu N gibt. In der folgenden Zusammenstellung ist der Fehler des Mittels von P und Q angegeben in Einheiten der dritten Decimale

$$N - \frac{P + Q}{2}$$

$b = a \times$	1.0	1.01	1.05	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$N = 1.0$	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9	0	0	0	0	1	1	2	3
0.8	0	0	0	1	1	2	3	4
0.7	0	0	0	0	1	1	2	3
0.6	0	0	0	0	0	1	1	2
0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4	0	0	0	0	0	1	1	2
0.3	0	0	0	0	1	1	2	3
0.2	0	0	0	1	1	2	3	4
0.1	0	0	0	0	1	1	2	3
0.0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bis zu $b = 1.1 a$ kann man also $\frac{P + Q}{2} = N$ annehmen für jeden Absorptionsgrad; bei steilerer Intensitätscurve ist der begangene Fehler immer noch klein, für bestimmte Grade der Absorption wird er gleich 0. Dieses Verschwinden des Fehlers wird näher angegeben durch Discussion der Bedingung

$$N - \frac{P + Q}{2} = 0, \text{ oder}$$

$$N = \frac{b - a + \sqrt{N(b^2 - a^2) + a^2} - \sqrt{b^2 - N(b^2 - a^2)}}{2(b - a)}, \text{ und}$$

diese Gleichung liefert die 3 Wurzeln $N = 0$, $N = \frac{1}{2}$, $N = 1$, für welche Werthe des Absorptionscoefficienten die Beziehung $\frac{P + Q}{2} = N$ also streng bei jedem Verhältniss von a und b

gilt. Das Maximum der Differenz von $\frac{P + Q}{2}$ und N ergibt sich durch Tabelle und Rechnung etwa bei $N = 0.8$ und $N = 0.2$. Will man demnach durch einseitige Veränderung den symmetrischen Coefficienten bestimmen, so kann dies nur dann völlig genau nach der Formel $N = \frac{P + Q}{2}$ geschehen,

wenn man durch Dämpfung einen der 3 Fälle: $N = 0$, $N = \frac{1}{2}$, $N = 1$ realisirt. N nahe $= 0$ zu machen, ist unthunlich aus schon angeführten Gründen; die dämpfenden Medien so zu wählen, dass das Normalspectrum doppelt so intensiv wird als das Absorptionsspectrum ($N = \frac{1}{2}$), ist umständlich, weil Vorversuche nöthig wären; also bleibt nur übrig, durch Dämpfung möglichste Gleichheit beider Spectren zu bewirken und insbesondere $N = 0.8$ und $N = 0.2$ zu vermeiden. Bei einseitiger Aenderung des Spalts ist also Dämpfung durchaus nöthig, wenn Normal- und Absorptionsspectrum wesentlich verschiedene Intensität darbieten, im Gegensatz zur symmetrischen Aenderung. Ist die Curve i_1 bekannt, so kann man leicht Correctionstabellen entwerfen und dann aus P oder aus Q allein auf N schliessen; ein Stück einer solchen Correctionstabelle gibt Vierordt in Wiedemanns Ann. 3 S. 368; oder man kann Tabellen nach Art der letzten für $N = \frac{P + Q}{2}$ berechnen, die dann gestatten, auch ohne Dämpfung N zu bestimmen.

Späterer Anwendung halber wollen wir die Werthe der einseitigen Coefficienten noch von einem andern Standpunkt aus ableiten. Ist wieder wie früher die Gleichung des Normalspectrums $i_1 = m_1 + n_1 x + p_1 x^2$ und die des Absorptionsspectrums $i_2 = m_2 + n_2 x + p_2 x^2$; hat ferner der Spalt des Absorptionsspectrums die Weite h , so ist der Inhalt des Flächenstreifens des Absorptionsspectrums

$$I_2 = m_2 h_1 + \frac{1}{12} p_2 h_1^3. \quad (1)$$

Nach Früherem erhält man dann unter der Voraussetzung von sehr kleinem p_1 (geradlinige Curve i_1) durch symmetrische Aenderung den Absorptionscoefficienten

$$N = \frac{s_1}{h_1} = \frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_1}. \quad (2)$$

Bei einseitiger Spaltänderung hat der Flächenstreifen I_1 des Normalspectrums andere Grenzen als bei symmetrischer

Aenderung, nämlich bei rechtsseitiger die obere Grenze $\frac{h_1}{2}$, die untere $\frac{h_1}{2} - s_{1r}$, und bei linksseitiger die obere Grenze $-\frac{h_1}{2} + s_{1l}$, die untere $-\frac{h_1}{2}$, wobei s_{1r} und s_{1l} die nöthigen Spaltbildweiten bei rechtsseitiger, bezw. linksseitiger Aenderung des Spaltbildes sind, die zu bestimmen sind aus den Gleichungen

$$I_2 = \int_{\frac{h_1}{2} - s_{1r}}^{\frac{h_1}{2}} m_1 + n_1 x \, dx = \int_{-\frac{h_1}{2}}^{-\frac{h_1}{2} + s_{1l}} m_1 + n_1 x \, dx. \quad (3)$$

Man erhält aus ihnen

$$s_{1r} = \frac{h_1}{2} + \frac{m_1}{n_1} - \sqrt{-\frac{2 h_1 m_1}{n_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{1}{12} \frac{p_2 h_1^2}{m_1} \right) + \left(\frac{h_1}{2} + \frac{m_1}{n_1} \right)^2},$$

und mit Benützung der Gleichung 2:

Rechtsseitiger Coefficient

$$\frac{s_{1r}}{h_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right) - \sqrt{-\frac{2 m_1}{n_1 h_1} N + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right)^2};$$

entsprechend

Linksseitiger Coefficient

$$\frac{s_{1l}}{h_1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2 m_1}{n_1 h_1} N + \frac{1}{4} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right)^2} \quad (4)$$

Die beiden Gleichungen 4 sind selbstverständlich identisch mit den für P und Q angegebenen Werthen auf S. 45, weil $m_1 = \frac{a+b}{2}$, $n_1 = \frac{b-a}{h_1}$.

Reihenentwicklung ergibt aus 4

$$\begin{aligned} \frac{s_{1r}}{h_1} = & \frac{\frac{2 m_1}{n_1 h_1}}{\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1} N + \frac{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right)^2}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^3} N^2 + \frac{2 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right)^3}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^5} N^3 \\ & + \frac{5 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right)^4}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^7} N^4 + \frac{14 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} \right)^5}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^9} N^5 \end{aligned} \quad (5)$$

und

$$\frac{s_{11}}{h_1} = \frac{\frac{2 m_1}{n_1 h_1}}{\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1} N - \frac{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1}\right)^2}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1\right)^2} N^2 + \frac{2 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1}\right)^3}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1\right)^5} N^3 - \frac{5 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1}\right)^4}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1\right)^7} N^4 + \frac{14 \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1}\right)^5}{\left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1\right)^9} N^5$$

Diese Reihen sind identisch mit den auf S. 46 befindlichen für P und Q. Man kann aus ihnen leicht durch Verwandlung der Coefficienten der Potenzen von N in Reihen folgende Beziehung herleiten

$$\frac{\frac{s_{1r}}{h_1} + \frac{s_{11}}{h_1}}{2} = N + \left(\frac{n_1 h_1}{2 m_1}\right)^2 (N - 3 N^2 + 2 N^3) + \left(\frac{n_1 h_1}{2 m_1}\right)^4 (N - 10 N^2 + 30 N^3 - 35 N^4 + 14 N^5) + \dots \quad (6)$$

Der Klammerausdruck $N - 3 N^2 + 2 N^3$ wird ein Maximum, wenn $0 = 1 - 6 N + 6 N^2$, d. h. wenn $N = \left\{ \begin{array}{l} 0.79 \\ 0.21 \end{array} \right.$, und

er wird = 0, wenn $N - 3 N^2 + 2 N^3 = 0$, d. h. wenn $N = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right.$

Damit also das arithmetische Mittel der einseitigen Coefficienten möglichst gleich dem symmetrischen Coefficienten wird, muss man

Dämpfung anwenden, bis $N = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right.$ ist; ein Resultat, das man

schon früher mit anderer Entwicklung erhielt, und welchem damals beigelegt wurde, dass einzig Herstellung möglicher örtlicher Intensitätsgleichheit beider Spectra ($N = 1$) praktisch zulässig ist. Auch die Vermeidung der Absorptionscoefficienten 0,8 und 0,2 wurde schon früher betont. Hier müssen wir jedoch noch Rücksicht auf das dritte Glied der Reihe nehmen. Nimmt man, um das zweite Glied = 0 zu erhalten, $N = 1$, so wird auch die Klammer $N - 10 N^2 + 30 N^3 - 35 N^4 + 14 N^5 = 0$; für andere N bleibt der Ausdruck stets sehr klein (unter 0.06) und wird bei $N = 0.5$ nochmals = 0. Benützt man die auf

S. 40 und 41 für das Lamansky'sche Sonnenspectrum gegebenen Werthe von n_1 und m_1 , so erhält man für

$$\text{Punkt I: } \frac{n_1 h_1}{2 m_1} = - 0.010,$$

$$\text{Punkt II: } \frac{n_1 h_1}{2 m_1} = - 0.008,$$

$$\text{Punkt III: } \frac{n_1 h_1}{2 m_1} = - 0.014, \text{ also stets so klein, dass in}$$

der obigen Reihe das dritte Glied mit $\left(\frac{n_1 h_1}{2 m_1}\right)^4$ weggelassen werden kann, und um so mehr, wenn N sehr nahe $= 1$ genommen wird.

Ueber die Grösse der Klammer $N - 3 N^2 + 2 N^3$ mag folgende Zusammenstellung Uebersicht geben:

$$\begin{array}{cccccc} N = & 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ N - 3 N^2 + 2 N^3 = & 0.000 & 0.072 & 0.096 & 0.084 & 0.048 & 0.000 \\ & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & \\ & - 0.048 & - 0.084 & - 0.096 & - 0.072 & 0.000, & \end{array}$$

und hiemit könnten die Werthe der Tabelle für $N = \frac{P + Q}{2}$ auf Seite 49 berechnet werden.

Das zweite Glied der Reihe in Gleichung 6 auf Seite 52 zeigt, dass die Abweichung des Mittels der einseitigen Coefficienten vom symmetrischen Coefficienten dem Quadrat der Spaltweite proportional ist.

Auf S. 40 und 41 wurde für mehrere Stellen des Blutspectrums der Unterschied zwischen dem wahren und dem symmetrischen Absorptionscoefficienten ermittelt. Wir wollen nun hier mit Bezug auf das unmittelbar Vorhergehende die beiden einseitigen Coefficienten mit dem symmetrischen vergleichen und berechnen die Werthe von $\frac{S_{1r}}{h_1}$ und $\frac{S_{1l}}{h_1}$ mit den Reihen 5 auf S. 51 und 52. Man erhält mit den früher angegebenen Werthen von m_1 , n_1 , N und h_1 für Punkt I

$$\frac{n_1 h_1}{2 m_1} = 0.01050 \text{ und hieraus}$$

$$\frac{S_{1r}}{h_1} = 0.87124 - 0.00805 + 0.00014 - 0.00000 + \dots = 0.8633,$$

$$\frac{S_{1l}}{h_1} = 0.85314 + 0.00756 + 0.00013 + 0.00000 + \dots = 0.8608.$$

Es ist also $\frac{S_{1r} + S_{11}}{2} = 0.8621$, genau = N.

Aus den Reihen ersieht man ihre rasche Convergenz; zugleich zeigt sich, da der wahre Absorptionscoefficient = 0.8629 ist, dass hier der rechtsseitige Coefficient sich dem wahren viel näher anschliesst als der symmetrische und der linksseitige.

Bei Punkt II ist N = 0.1314, und man erhält

$$\frac{S_{1r}}{h_1} = 0.13247 - 0.00014 + 0.00000 = 0.1323$$

$$\frac{S_{11}}{h_1} = 0.13035 + 0.00014 + 0.00000 = 0.1305.$$

Auch hier wird $\frac{\frac{S_{1r}}{h_1} + \frac{S_{11}}{h_1}}{2}$ genau = N. Der wahre Ab-

sorptionscoefficient ist = 0.1297, so dass der linksseitige Coefficient ihm am nächsten kommt, was natürlich von den speciellen Verhältnissen der Curven i_1 und i_2 abhängt.

Bisher wurde stets angenommen, es werde an dem auf unser Auge oder ein Intensitätsmessinstrument wirkenden Spectrum nur die Intensität eines unendlich schmalen Streifens bestimmter Ablenkung, einer Linie, gemessen. In diesem linearen Streifen ist, wie wir sahen, die Intensität eines Bündels von unendlich vielen Strahlen vereinigt, die im Spectrum alle um nicht mehr als die halbe Spaltbildbreite von jener Linie entfernt sind. In Wirklichkeit kommt aber auf unserem Messinstrument nie blos die längs einer Linie vorhandene Intensität zur Wirkung, sondern es ist immer ein ganzer Streifen gewisser endlicher Breite in Betracht zu ziehen. Bei der physiologischen Methode z. B. kommt alles Licht zur Wirkung, welches die mehr oder minder geöffnete Ocularschieberblendung passirt; bei Messung der absoluten Intensität durch die Thermosäule muss man dieser eine bestimmte, wenn auch kleine Breite geben. Aber stets messen wir die Intensität eines nicht linearen Spectralstreifens, in welchem diejenige unendlich vieler linearer nebeneinanderliegender Streifen enthalten ist. Man sieht, wir entfernen uns also in Wirklichkeit noch weiter von unserem

Zweck der darin besteht, das Verhältniss $\frac{m_2}{m_1}$, den wahren Absorptionscoefficienten, oder auch die Grösse i zu messen, als bisher gefunden wurde; wir messen nicht blos ein Zusammengesetztes erster Ordnung, wie es die längs eines linearen Streifens vorhandene Intensität ist, sondern wir haben es bei unseren Messungen mit dem Resultat einer zweifachen Integration zu thun, die sich auf alle linearen Streifen bezieht, welche von unserem Messinstrument zugleich aufgenommen werden. Während aber bei der ersten Integration, welcher die Curve i_1 zu Grund gelegt wurde, die Grenzen veränderliche waren, je nach der Spaltbildbreite, hat man die zweite Integration über einen Streifen von stets constanter Breite auszudehnen, entsprechend der Breite der Ocularschieberblendung, der Thermosäule etc. Wir dürfen wohl ohne Weiteres voraussetzen, dass diese Breite so klein ist, dass innerhalb derselben keine schroffen Intensitätswechsel des Spectrums, bezw. der 2 Spectra vorkommen. Bei physiologischen Intensitätsbestimmungen z. B. wird die Breite der Ocularblendung womöglich so klein sein, dass das Auge die aus dem Spectrum ausgeschnittene Fläche gleichmässig erhellt und ohne merkbare Farbendifferenz am einen und andern Ende wahrnimmt. Ist der Ocularspalt breiter, so ist die Bestimmung des Absorptionscoefficienten einer bestimmten Stelle nach der Vierordt'schen Methode mit physiologischen Schwierigkeiten verbunden, da Unsicherheit im Beurtheilen hereinkommt.

Um die Frage analytisch klarzulegen, sei die Curve i_1 zweiten Grads innerhalb der Spaltbildbreite, nämlich $i_1 = m_1 + n_1 x + p_1 x^2$; die Spaltbildbreite $= s_1$, die Weite der Ocularblendung $= b$. s_1 sei constant über die Ausdehnung b . Die Mittellinie der Ocularblendung werde als Ordinatenaxe genommen. Dann hat ein linearer Spectralstreifen mit der Abscisse e die Intensität

$$I_1 = \int_{e - \frac{s_1}{2}}^{e + \frac{s_1}{2}} (m_1 + n_1 x + p_1 x^2) dx = s_1 \left(m_1 + \frac{1}{12} p_1 s_1^2 \right) + s_1 n_1 e + p_1 s_1 e^2$$

Folglich bietet die ganze Ocularblendungsöffnung die Intensität

$$\begin{aligned}
 & + \frac{b}{2} \\
 E_1 = \int I_1 \, d e &= s_1 b \left(m_1 + \frac{1}{I_2} p_1 s_1^2 \right) + \frac{1}{I_2} p_1 s_1 b^3 \\
 & - \frac{b}{2} \\
 &= s_1 b m_1 + \frac{1}{I_2} s_1 b p_1 (s_1^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

Man bekommt also in der Intensität E_1 des ganzen Streifens kein Mass für das eigentlich gesuchte m_1 ; man bekäme ein solches, oder wenigstens eine Grösse proportional m_1 , wenn $p_1 = 0$ wäre, die Curve i_1 also innerhalb der Spaltbildbreite als Gerade betrachtet werden dürfte. Für eine andere Stelle desselben Spectrums hat man mit gleicher Spaltweite s

$E'_1 = s'_1 b m'_1 + \frac{1}{I_2} s'_1 b p'_1 (s'^2_1 + b^2)$, also wird das Verhältniss der Intensitäten der beiden Stellen gefunden

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{s'_1 m'_1 + \frac{1}{I_2} s'_1 p'_1 (s'^2_1 + b^2)}{s_1 m_1 + \frac{1}{I_2} s_1 p_1 (s_1^2 + b^2)}. \quad \text{Mit } p_1 \text{ und}$$

$p'_1 = 0$, also mit Voraussetzung geradliniger Curve i_1 innerhalb der Spaltbildbreite an den zu vergleichenden Stellen, fällt die Ocularblendungsbreite b ganz weg aus dem Verhältniss $\frac{E'_1}{E_1}$; man hat $\frac{E'_1}{E_1} = \frac{s'_1 m'_1}{s_1 m_1}$ und das ist unmittelbar das Verhältniss zweier Ordinaten der Curve i selbst, mit Umgehung von Curve i_1 (vergl. S. 20 u. 21). Setzt man p_1 und p'_1 nicht $= 0$, so kann man schreiben

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{s'_1 m'_1}{s_1 m_1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{I_2} \frac{p'_1}{m'_1} (s'^2_1 + b^2)}{1 + \frac{1}{I_2} \frac{p_1}{m_1} (s_1^2 + b^2)}. \quad \text{Mit } b = 0 \text{ geht}$$

dieser Ausdruck in den auf S. 20 für linearen Streifen entwickelten über, wenn zugleich dort auch noch δ_1 vernachlässigt wird. Betrachtet man wie dort $\frac{p'_1}{m'_1}$ und $\frac{p_1}{m_1}$ als sehr kleine Grössen, so wird

$$\frac{E'_1}{E_1} = \frac{s'_1 m'_1}{s_1 m_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{p'_1}{m'_1} s'^2_1 - \frac{p_1}{m_1} s^2_1 \right) + \frac{b^2}{12} \left(\frac{p'_1}{m'_1} - \frac{p_1}{m_1} \right) \right).$$

Die Abweichung des mit endlicher Ocularblendungsbreite bestimmten Intensitätsverhältnisses von demjenigen, welches man durch Messung linearer Streifen erhält, ist also proportional dem Quadrat der Ocularspaltweite. — Bei eingehender Behandlung dieser Aufgabe müsste man jedenfalls den Werth von δ berücksichtigen, ebensogut als es auf S. 20 geschah.

Misst man an einer und derselben Stelle eines Spectrums bei verschiedenen Spaltweiten s und t , so hat man als Verhältniss der gemessenen Intensitäten (vergl. S. 23):

$$\begin{aligned} \frac{E_{1s}}{E_{1t}} &= \frac{s_1 b m_1 + \frac{1}{12} s_1 b p_1 (s_1^2 + b^2)}{t_1 b m_1 + \frac{1}{12} t_1 b p_1 (t_1^2 + b^2)} \\ &= \frac{s_1}{t_1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12} \frac{p_1}{m_1} (s_1^2 + b^2)}{1 + \frac{1}{12} \frac{p_1}{m_1} (t_1^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Mit $p_1 = 0$ erhält man auch hier Proportionalität zwischen Intensität und Spaltweite, und zugleich kommt b gar nicht in Betracht. Ist $\frac{p_1}{m_1}$ klein, so kann man annäherungsweise setzen

$$\frac{E_{1s}}{E_{1t}} = \frac{s_1}{t_1} \left(1 + \frac{1}{12} \frac{p_1}{m_1} (s_1^2 - t_1^2) \right)$$

und dies ist genau die nämliche Formel, die man auf S. 24 für $\frac{I_{1s}}{I_{1t}}$ fand, wenn man dort wie hier $\delta_1 = 0$ annimmt. Insbesondere ist auch hier die Abwesenheit von b zu bemerken; $\frac{E_{1s}}{E_{1t}}$ ist also genau gleich dem auf S. 24 und 25 betrachteten

Verhältniss $\frac{I_{1s}}{I_{1t}}$, und sämtliche dort angefügten Schlüsse gelten auch hier.

Derselbe Weg, der auf S. 29 oben zur Bestimmung der Curve i_1 aus Intensitätsmessungen linearer Spectralstreifen angedeutet wurde, kann auch bei Messungen mit der Breite b

der Ocularblendung eingeschlagen werden; man hat dann eben statt der Gleichung für I_{1s} die folgende zu Grunde zu legen:

$$E_1 = s_1 b m_1 + \frac{1}{I_2} s_1 b p_1 (s_1^2 + b^2).$$

Bestimmung von symmetrischen Absorptionscoefficienten mit Voraussetzung der Ocularspaltbreite b .

Man hat zur Bestimmung der Spaltbildbreite des Normal-spectrums die Gleichung $E_1 = E_2$, oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_2} s_1^3 b p_1 + s_1 \left(b m_1 + \frac{1}{I_2} b^3 p_1 \right) \\ = \frac{1}{I_2} h_1^3 b p_2 + h_1 \left(b m_2 + \frac{1}{I_2} b^3 p_2 \right), \end{aligned}$$

wenn wie früher h_1 die Maximalspaltbildbreite ist. Man erhält hieraus

$s_1^3 p_1 + s_1 (I_2 m_1 + b^2 p_1) = h_1^3 p_2 + h_1 (I_2 m_2 + b^2 p_2)$, und diese Gleichung zeigt, dass man mit $p_1 = p_2 = 0$ auf die einfache Beziehung $\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1}$ kommt. In diesem Fall bekommt

man also auch hier den richtigen Absorptionscoefficienten durch das Verhältniss der Spaltbildbreiten s_1 und h_1 , d. h. durch das Verhältniss der Spaltweiten des Normal- und des Absorptionsspectrums, und die Grösse b kommt nicht in Betracht.

Um einfache Formeln zu erhalten, wollen wir $p_1 = 0$ nehmen, also wenigstens die Curve i_1 als geradlinig innerhalb der Spaltbildbreite betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} I_2 s_1 m_1 = h_1^3 p_2 + h_1 (I_2 m_2 + b^2 p_2), \text{ also} \\ \frac{s_1}{h_1} = h_1^2 \frac{p_2}{I_2 m_1} + \frac{m_2}{m_1} + \frac{b^2 p_2}{I_2 m_1} = \frac{m_2}{m_1} + \frac{p_2}{I_2 m_1} (h_1^2 + b^2) = N. \end{aligned}$$

Nimmt man somit statt $\frac{m_2}{m_1}$ den Absorptionscoefficienten $= \frac{s_1}{h_1}$ an, so begeht man einen Fehler, der mit der Krümmung der Curve i_2 zunimmt und proportional ist der Summe der Quadrate der Spaltbildbreite und der Ocularspaltweite; mit wachsender Spaltweite und Ocularblendungsweite vergrössert sich demnach der Fehler sehr beträchtlich. Auf S. 35 erhielt man für den Fehler des Absorptionscoefficienten bei Messung der Intensität

linearer Streifen $\frac{p_2 h_1^2}{12 m_1}$; hier kommt also noch hinzu das Glied $\frac{p_2 b^2}{12 m_1}$. Man begeht also, wenn z. B. $b = h_1$, den doppelten Fehler im Vergleich zu der auf S. 34 u. 35 behandelten Messmethode.

Einfluss der Ocularblendungsweite b auf den Absorptionscoefficienten bei einseitiger Spaltänderung.

Der innerhalb der Ocularblendung erscheinende Streifen des Absorptionsspectrums hat die Intensität

$$E_2 = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} i_2 dx de = h_1 b m_2 + \frac{I}{12} h_1 b p_2 (h_1^2 + b^2).$$

Bei Aenderung der Spaltbildbreite des Normalspectrums von h_1 auf s_1 , und zwar bei alleiniger Verschiebung des rechten Spaltbildrandes hat man innerhalb des Ocularspalts

$$E_{1r} = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} i_1 dx de = s_1 \left(m_1 b + \frac{I}{2} n_1 h_1 b + \frac{I}{4} p_1 h_1^2 b + \frac{I}{12} p_1 b^3 \right) + s_1^2 \left(-\frac{I}{2} n_1 b - \frac{I}{2} p_1 h_1 b \right) + \frac{I}{3} p_1 s_1^3 b$$

und bei Verschiebung links

$$E_{1l} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{+\frac{h_1}{2}} i_1 dx de = s_1 \left(m_1 b - \frac{I}{2} n_1 h_1 b + \frac{I}{4} p_1 h_1^2 b + \frac{I}{12} p_1 b^3 \right) + s_1^2 \left(\frac{I}{2} n_1 b - \frac{I}{2} p_1 h_1 b \right) + \frac{I}{3} p_1 s_1^3 b,$$

wobei der Ursprung des Coordinatensystems stets auf der Mittellinie des Ocularspalts liegen, und zugleich die Blendungsweite so klein sein soll, dass innerhalb derselben die Curven i_1 und i_2 als solche von höchstens zweitem Grade betrachtet werden dürfen.

Der Spalt des Normalspectrums wird so lange einseitig

geändert, bis E_{1r} oder $E_{11} = E_2$ geworden ist; die hiezu nöthige Spaltbildbreite s_1 ergibt sich aus der Gleichung

$$s_1^3 \cdot \frac{1}{3} p_1 b + s_1^2 \left(\mp \frac{1}{2} n_1 b - \frac{1}{2} p_1 h_1 b \right) + s_1 \left(m_1 b \pm \frac{1}{2} n_1 h_1 b + \frac{1}{4} p_1 h_1^2 b + \frac{1}{12} p_1 b^3 \right) = h_1 b m_2 + \frac{1}{12} h_1 b p_2 (h_1^2 + b^2),$$

in welcher sich von den Doppelzeichen das obere auf rechtsseitige, das untere auf linksseitige Aenderung bezieht. Hieraus lässt sich der Absorptionscoefficient $\frac{s_1}{h_1}$ bestimmen, welcher statt

des wahren $\frac{m_2}{m_1}$ gefunden wird. Zur Vereinfachung der Betrachtung sei wieder $p_1 = 0$, die Intensitätscurve des Normalspectrums also geradlinig; dann hat man

$$\mp s_1^2 \cdot \frac{1}{2} n_1 b + s_1 \left(m_1 b \pm \frac{1}{2} n_1 h_1 b \right) = h_1 b m_2 + \frac{1}{12} h_1 b p_2 (h_1^2 + b^2)$$

oder für eine Aenderung

$$\left. \begin{array}{l} \text{rechts} \\ \text{links} \end{array} \right\} \mp s_1^2 \cdot \frac{1}{2} n_1 + s_1 \left(m_1 \pm \frac{1}{2} n_1 h_1 \right) = h_1 m_2 + \frac{1}{12} h_1 p_2 (h_1^2 + b^2)$$

Ist auch noch $p_2 = 0$, so hat man eine von b ganz unabhängige Gleichung; andernfalls ergibt sich

$$\text{rechts } \frac{s_{1r}}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)$$

$$- \sqrt{ - \frac{2 m_1}{h_1 n_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{p_2}{12 m_1} (h_1^2 + b^2) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^2 }$$

$$\text{und links } \frac{s_{1l}}{h_1} = - \frac{1}{2} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right)$$

$$+ \sqrt{ \frac{2 m_1}{h_1 n_1} \left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{p_2}{12 m_1} (h_1^2 + b^2) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right)^2 }$$

Nach S. 58 ist aber der bei symmetrischer Aenderung gefundene Absorptionscoefficient unter Berücksichtigung der Ocularspaltbildbreite b

$$= N = \frac{m_2}{m_1} + \frac{p_2}{12 m_1} (h_1^2 + b^2), \text{ also}$$

$$\frac{s_{1r}}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right) - \sqrt{ - \frac{2 m_1}{n_1 h_1} \cdot N + \frac{1}{4} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} + 1 \right)^2 } \quad \text{und}$$

$$\frac{s_{1l}}{h_1} = - \frac{1}{2} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right) + \sqrt{ \frac{2 m_1}{n_1 h_1} N + \frac{1}{4} \left(\frac{2 m_1}{n_1 h_1} - 1 \right)^2 }.$$

Dies sind genau die nämlichen Gleichungen, wie die Gleichungen 4 auf S. 51, welche für die einseitigen Coefficienten unter Voraussetzung linearer Spectralstreifen entwickelt wurden, nur hat N andere Bedeutung.

Von hier an gilt buchstäblich die Entwicklung auf S. 51 ff.; insbesondere die Reihen 5 und 6 und die aus ihnen gezogenen Folgerungen. Das arithmetische Mittel der zwei einseitigen Coefficienten gibt auch hier den symmetrischen Coefficienten, wenn die richtige Dämpfung angewandt wird.

Aehnlich wie bei Intensitätsmessungen linearer Streifen findet man auch hier, dass der wahre Absorptionscoefficient $\frac{m_2}{m_1}$ durch eine einseitige Messung im Allgemeinen selbst dann nicht direct gefunden wird, wenn sowohl p_2 als $p_1 = 0$ ist, während bei symmetrischen Aenderungen in dem Fall $\frac{m_2}{m_1} = \frac{s_1}{h_1}$ sich ergibt, sogar bei Berücksichtigung der Ocularspaltbreite b . Durch das arithmetische Mittel der beiden einseitigen Coefficienten erhält man aber dann ebenfalls den wahren Absorptionscoefficienten.

Aus allem Vorhergehenden folgt: die modificirte Vierordt'sche Methode (symmetrische Spaltänderung), angewandt auf absolute Intensitätsmessungen, ist völlig genau für jede Spaltweite und jede Ocularblendungsbreite, wenn die Intensitätscurven des Absorptions- und Normalspectrums innerhalb einer Spaltbildbreite als geradlinig betrachtet werden können. Ist dies nicht der Fall, so erhält man nur Annäherungsergebnisse, die im Allgemeinen um so genauer sind, je kleiner die Abweichungen der Intensitätscurven von Geraden innerhalb der Spaltbildbreiten, d. h. je enger der Spalt ist. Sogar Spectra, die nur aus einzelnen hellen Linien bestehen, können nach dieser Methode behandelt werden, wenn nur das Normalspectrum die richtige Beschaffenheit hat.

Bei einseitiger Veränderung des Spaltbilds (ältere Vier-

ordt'sche Methode) tritt eine Abweichung der durch Beobachtung gefundenen Coefficienten von den durch symmetrische Aenderung erhaltenen ein, die sich um so grösser gestaltet, je steiler die Linie i_1 ist. Bei den symmetrischen Coefficienten 1 und 0 verschwindet diese Abweichung; sie erreicht bei 0,5 ihr Maximum. Die Fehler haben bei einseitiger Aenderung rechts und bei einseitiger Aenderung links nahezu dieselbe Grösse, sind aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet. Im Mittel heben sie sich also nahezu auf, so dass man durch das arithmetische Mittel der zwei einseitigen Coefficienten nahezu den symmetrischen Coefficienten erhält, wenn die Curve i_1 innerhalb der Spaltbildbreite und der Ocularblendungsbreite als Gerade betrachtet werden darf. Das Mittel der einseitigen Coefficienten ist genau gleich dem symmetrischen, wenn letzterer = 1, 0,5 oder 0, woraus die Nothwendigkeit der Dämpfung des Normalspectrums folgt. Der Maximalfehler des Mittels der 2 einseitigen Bestimmungen tritt etwa beim symmetrischen Absorptionscoefficienten $\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{5}$ auf. Der Fehler wächst ungefähr proportional dem Quadrat der Spaltweite h .

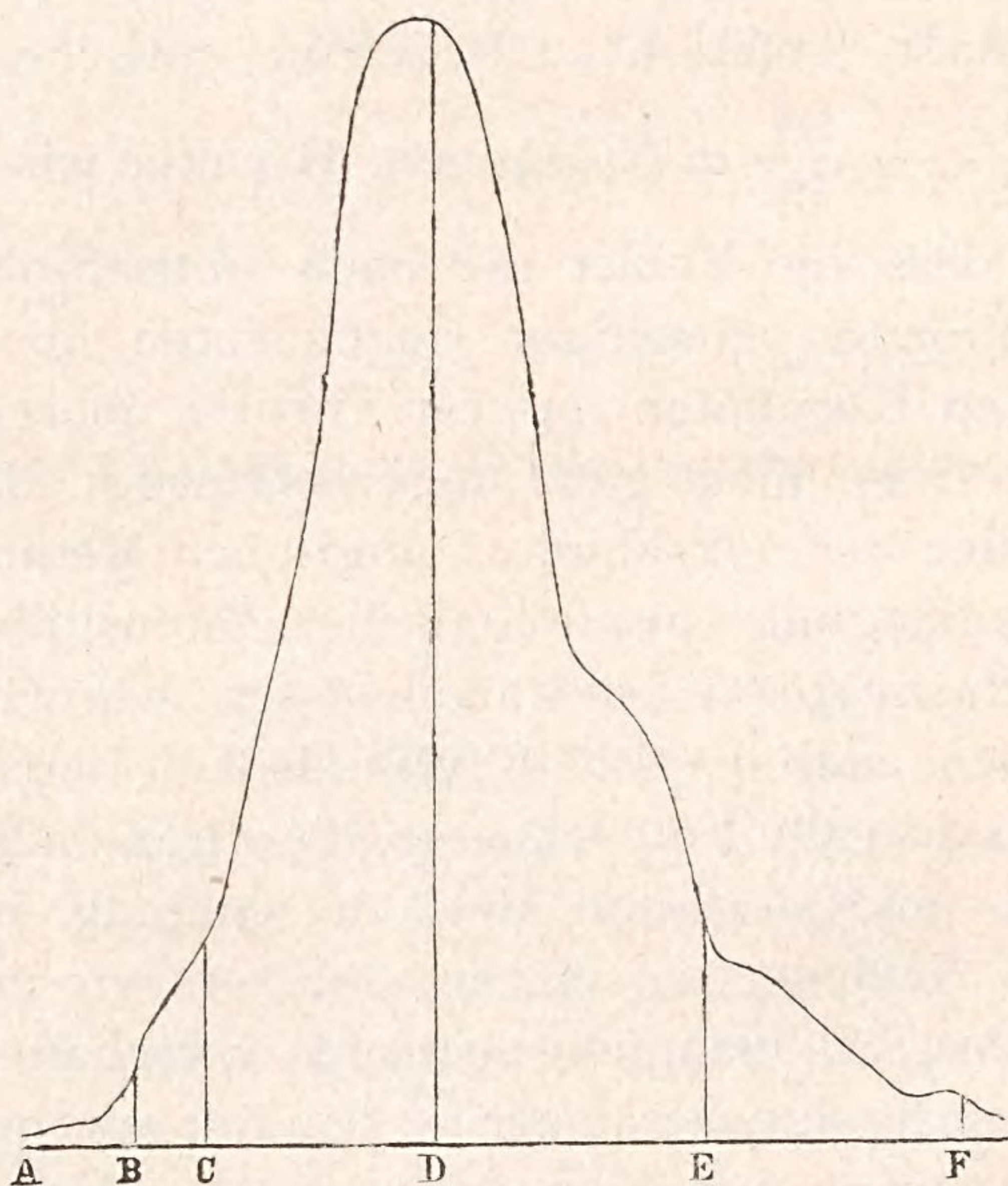
Man sieht, im Wesentlichen ergeben sich durch unsere mathematischen Betrachtungen mit Zugrundelegung einer absoluten Intensitätsmessung dieselben Resultate, wie sie Vierordt aus Versuchen für seine physiologisch-optische Methode ableitet (Wiedemanns Annalen 3). Insbesondere findet auch Vierordt experimentell als Hauptresultat, dass die Fehler bei einseitigen Aenderungen nahe gleich und entgegengesetzt sind. Ob die Differenz eines einseitigen und des symmetrischen Coefficienten bei den Vierordt'schen Messungen ebenso von der Grösse der letztern abhängt wie nach unserer mathematischen Ableitung, dass sie also bei $N = 0$ und 1 verschwindet und etwa bei $N = 0,5$ ein Maximum wird, ist natürlich aus den in Wiedemann's Annalen 3 publicirten Resultaten nicht ersichtlich, weil dort eine bestimmte Stelle des Spectrums nur mit einem Absorptionscoefficienten untersucht wird; es bliebe nichts anderes übrig, als möglichst viele verschiedene Absorptionsspectren derselben Untersuchung zu unterziehen, welche Vierordt am angeführten

Orte mit einem Rauchglas - Absorptionsspectrum ausführt. Vierordt gibt in seiner Tabelle bestimmte Correctionswerthe, die bei Messungen mit einseitiger Spaltänderung angebracht werden müssen, um den symmetrischen Coefficienten zu erhalten; unter Umständen müsste diese Tabelle erweitert werden, indem man sie auf verschiedene Absorptionscoefficienten für jeden Ort des Spectrums ausdehnt. Zum Entwerfen einer solchen Tabelle gehört aber vor allem ein sehr geübter Beobachter, der schon Tausende von Messungen ausgeführt hat; vielleicht wäre es möglich, dass Vierordt aus dem ihm vorliegenden reichhaltigen Material die Frage leicht beantworten könnte.

Das Wichtigste bleibt uns der Umstand, dass nicht blos eine mathematische Betrachtung, die auf nicht physiologischen Grundlagen fusst, sondern auch genaue optisch-physiologische Messungen $\frac{S_{1r}}{h_1} + \frac{S_{11}}{h_1} = N$ ergeben. Könnten wir überdies noch nachweisen, dass die Fehler der nach optisch-physiologischer Methode bestimmten einseitigen Coefficienten hinsichtlich ihrer Grösse mit den Resultaten unserer Theorie übereinstimmen, so wäre die Hypothese nicht ganz ungerechtfertigt, dass sich überhaupt die Fehler der optisch-physiologischen Methode Vierordt's unter Zugrundelegung physiologischer Intensitätscurven nach ähnlichen Principien berechnen lassen, wie wir sie bei den vorhergehenden mathematisch-physikalischen Betrachtungen anwandten; dass also alle Folgerungen, die wir damals anschlossen, auch für die physiologische Methode Geltung besitzen. Um einen solchen Nachweis zu führen, müssen wir uns vor Allem die Curve i_1 des Erdölflammenspectrums verschaffen, aber nicht die mechanische Intensitätscurve, von der wir bisher redeten, sondern eine Curve der physiologischen Intensität. Hiezu benützten wir die Intensitätswerthe, die Vierordt für das Erdölflammenspectrum in seiner Schrift »die Anwendung des Spectralapparats zur Messung und Vergleichung der Stärke des farbigen Lichts« auf S. 88 in Tab. XXXVII angibt. Die dort gegebenen Zahlenwerthe wurden bei Aufzeichnung der Curve als Intensitäten der Mitten der betreffenden Spectralbezirke genommen; wenn es z. B. heisst C — C 10 D 181.800, so wurde dieser Werth dem Punkt C 5 D beigelegt. Auf diese Weise

kam die Curve zu Stande, welche in Fig. 10 dargestellt ist und die wir im Folgenden stets physiologische Intensitätscurve des Erdölflammspectrums nennen wollen; die Breite der einzelnen Bezirke Aa, aB, B C etc. wurde der Tabelle XV, S. 56 des citirten Werkes entnommen. Als Spaltbildbreite wurde, nach Massgabe des Spectralapparats der hiesigen technischen Hochschule, die Grösse $\frac{I}{10} (C - D)$ gewählt. Auch in Wiedemann's Annalen 3, S. 368 bezieht Vierordt seine Angaben auf ganze Spectralbezirke, z. B. a 37 B — B, $N = 0.585$; wir

Fig. 10.



nahmen diesen Absorptionscoefficienten als giltig für die Mitte des Bezirks, also für Punkt a 68 B. Zur Berechnung wurden die Formeln für P und Q auf S. 45 gewählt, die sich auf geradlinige Curve i_1 beziehen, was auch an den Orten, die der Berechnung unterzogen wurden, insbesondere mit Rücksicht auf die Unsicherheit in den feineren Details der Curve i_1 , zulässig erscheint.

Es ergab sich für

	a37B—B	B—B55C	B88C—C15D	C71D—D	D39E—D66E	E—E32F	E80F—F
mit N =	0.585	0.515	0.435	0.454	0.440	0.434	0.360
$P = \frac{S_{1r}}{h_1} =$	0.501	0.492	0.414	0.454	0.443	0.442	0.382
$Q = \frac{S_{11}}{h_1} =$	0.660	0.538	0.457	0.454	0.437	0.426	0.339
$\frac{P+Q}{2} =$	0.581	0.515	0.435	0.454	0.440	0.434	0.360

also Abweichung der einseitigen Coefficienten P und Q vom symmetrischen $\frac{P+Q}{2}$

$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{21.5}$	$\frac{1}{20.7}$	0	$\frac{1}{147}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{17.2}$
-----------------	------------------	------------------	---	-----------------	----------------	------------------

während Vierordt findet

$\frac{1}{21.6}$	$\frac{1}{30.2}$	$\frac{1}{109}$	0	$\frac{1}{146}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{89}$
------------------	------------------	-----------------	---	-----------------	-----------------	----------------

Unsere Fehler sind also mit Ausnahme desjenigen beim horizontalen Curvenelement und desjenigen bei der in der Zeichnung ziemlich unsichern Stelle D 39 E—D 66 E (d. h. D 52 E) viel zu gross.

Woher rührt nun diese Differenz in der Grösse der Fehler? Zum Theil ohne Zweifel daher, dass die oben zu Grunde gelegte Curve i_1 des Erdölflammenspectrums nicht genau genug bekannt ist. Ferner wurde die Spaltbildbreite willkürlich $= \frac{1}{10} (C - D)$ gewählt, da in Vierordt's Schriften zwar wohl

die Spaltweite $\left(= \frac{1}{5} \text{ mm} \right)$, nicht aber die Spaltbildbreite angegeben ist; eine geringere Spaltbildbreite ergäbe aber in unserer Rechnung auch einen kleinern Fehler von P und Q. Ein genauer bekannter Verlauf der Curve i_1 sowohl, als auch andere Spaltbildbreite vermögen jedoch keineswegs den Unterschied zwischen den von Vierordt experimentell bestimmten Fehlern bei einseitiger Spaltänderung und den hier berechneten zu heben; der Unterschied beruht vielmehr darauf, dass wir stets ein Messinstrument voraussetzten, welches absolute Messungen im physikalischen Sinne gestattet, das nämlich mecha-

nische Intensitäten zu messen erlaubt, während Vierordt bei seiner Methode das Auge als Messinstrument benützt. Bei unserer fingirten Methode liessen sich Berechnungen anstellen, sobald aber die Empfindungen des Auges in Frage kommen, befinden wir uns auf physiologischem Gebiet und mit mathematischer Formulirung ist es vorbei, weil die in einem linearen Spectralstreifen vereinigten Strahlen verschiedene Wellenlänge und verschiedene mechanische Intensität haben, und wir keine Beziehung zwischen der Empfindungsstärke einerseits und der Wellenlänge und der mechanischen Intensität gegebener Strahlen andererseits kennen, vollends wenn dieselben vereinigt in's Auge gelangen. Ohne ganz bestimmte Hypothesen aufzustellen, ist es also der Natur der Sache nach ganz unmöglich, auf Grund von Rechnung für oder gegen die Zulässigkeit und Genauigkeit der Vierordt'schen Methode ein Urtheil abzugeben; unsere Betrachtungen zeigen nur, dass eine der Vierordt'schen analog gebildete absolute mechanische Methode in praxi recht wohl brauchbar ist, so lange bestimmte Einschränkungen beachtet werden.

Ueber Vierordt's optisch-physiologische Methode selbst kann nur das Experiment entscheiden, so lange die Physiologie der Sinne nicht andere Hilfsmittel zur Beurtheilung liefert. Manche Frage allerdings kann schon jetzt auf theoretischer Grundlage beantwortet werden; es lässt sich z. B. a priori sagen, dass man um so genauere Resultate erhalten wird, je weniger schroffe Intensitätswechsel in den Spectren vorkommen, je mehr die Curven i_1 und i_2 Geraden sich nähern. Den experimentellen Beweis von der praktischen Zulässigkeit und Genauigkeit seiner Methode bei Einhaltung der nöthigen Vorsichtsmassregeln hat Vierordt selbst aber dargebracht durch seine Beobachtungen und durch die Resultate derselben; er weist mit Recht darauf hin, dass bei verschiedenen Spaltweiten und mit verschiedenen Spectralapparaten Resultate gewonnen werden, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehler als identisch angesehen werden müssen.

Die Grösse der Differenzen zwischen den von uns berechneten und den von Vierordt beobachteten Fehlern von P und Q lässt vermuthen, dass wir entweder bei der physiologischen

Methode eine durchaus andere Behandlung der Fehlerbestimmung nöthig haben, oder dass die angenommene physiologische Curve i_1 durch eine wesentlich andere ersetzt werden muss. Gegen die erstere Vermuthung spricht die merkwürdige Uebereinstimmung von $\frac{P + Q}{2}$ mit N , welche Vierordt findet, sowie der Umstand, dass die Fehler von P und Q bei Vierordt um so kleiner werden, je näher man dem horizontalen Element (der Maximalordinate) der Curve i_1 kommt, und dass sie dort ganz verschwinden, also ganz wie bei unsern frühern Betrachtungen. Lassen wir demnach die zweite Vermuthung gelten, so tritt die Aufgabe an uns heran, eine andere Curve i_1 zu substituiren. Da die Vierordt'schen Fehler wesentlich kleiner sind als die unsern, so müssen wir eine flachere Curve i_1 wählen, denn durch kleinere Differenzen von a und b (S. 45) wird der Fehler von P und Q vermindert. Das hat aber den physiologischen Sinn, dass das Auge das Verhältniss der optischen Intensitäten von an einer Stelle zusammen auftretenden Strahlen nicht so gross auffasst, als es in Wirklichkeit ist. Berücksichtigen wir das Weber-Fechner'sche Gesetz, dass die Empfindungsstärke proportional dem Logarithmus des Reizes ist, so sind wir einigermaßen berechtigt, statt der Vierordt'schen Curve i_1 des Erdölflammenspectrums, die wir oben benützten, eine solche anzuwenden, deren Ordinaten die Logarithmen der Ordinaten jener sind. Welcher Grundzahl die Logarithmen angehören, ist einerlei, denn man erhält bei verschiedenen Grundzahlen Curven, deren Ordinaten alle im gleichen Verhältniss vergrössert oder verkleinert sind, also für eine bestimmte Stelle bei gleichem N nach den Formeln auf S. 45 dasselbe P oder Q bei allen derartigen Curven. Es soll ausdrücklich bemerkt werden, dass die Ersetzung der oben gebrauchten Intensitätscurve durch eine solche, deren Ordinaten die Logarithmen der Ordinaten jener sind, streng genommen nicht berechtigt ist, sondern nur als erste Annäherung gelten soll, welche die Empfindungsstärke für die einzelnen zusammen in's Auge gelangenden Strahlen etwas besser darstellt, als die Vierordt'sche Curve i_1 selbst.

Führt man mit dieser neuen Curve die Rechnung abermals durch, so erhält man folgende Fehler von P und Q

$$\left(\text{d. h. } \frac{P+Q}{2} - \left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} \right)$$

	N	Fehler $\frac{P+Q}{2} - \left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\}$	Fehler nach Vierordt
a 37 B — B	0.585	$\frac{1}{19.2}$	$\frac{1}{21.6}$
B — B 55 C	0.515	$\frac{1}{87.2}$	$\frac{1}{30.2}$
B 88 C — C 15 D	0.435	$\frac{1}{92.6}$	$\frac{1}{109}$
C 55 D — C 71 D	0.432	$\frac{1}{82.3}$	$\frac{1}{109}$
C 71 D — D	0.454	0	0
D 15 E — D 30 E	0.457	$\frac{1}{163}$	$\frac{1}{153}$
D 39 E — D 66 E	0.440	0	$\frac{1}{146}$
E — E 32 F	0.434	$\frac{1}{207}$	$\frac{1}{160}$
E 80 F — F	0.360	$\frac{1}{48.6}$	$\frac{1}{89}$

Grössere Abweichungen kommen vor 1) bei B — B 55 C, 2) bei D 39 E — D 66 E, 3) bei E 80 F — F; sonst findet eine befriedigende Uebereinstimmung statt. Die drei bezeichneten fehlerhaften Stellen sind solche, bei welchen geringe Aenderung der gerade dort unsicher verlaufenden Curve eine grosse Aenderung des Fehlers zur Folge hätte; sie können also nicht als beweisend gegen die Zulässigkeit unserer Substitution gelten. Aber allerdings zeugen die andern, besser stimmenden Werthe auch nicht für die Zulässigkeit, und die ganze Betrachtung kann nur zeigen, dass man durch Zugrundelegung einer solchen

durch Logarithmirung gewonnenen Curve Fehler von P und Q berechnet, die mit den beobachteten etwa von gleicher Ordnung sind. Durch genauere Feststellung des Verlaufs der physiologischen Curve i_1 , sei es nach der Vierordt'schen Methode (s. a. a. O.), sei es nach einer andern, und durch zahlreiche experimentelle Bestimmungen von P , Q und N unter den verschiedensten Verhältnissen kann allein näher untersucht werden, ob unsere Hypothese richtig ist, dass man mit Zugrundelegung einer nach bestimmtem Gesetz gebildeten Ableitung aus der physiologischen Intensitätscurve i_1 die Fehler der Messungen mit dem Vierordt'schen Doppelspalt genau so bestimmen kann, als ob es sich nicht um Messungen mit dem physiologischen Instrument Auge, sondern um objective mechanische Intensitätsbestimmungen handle. Bei zahlreich vorhandenen Beobachtungsergebnissen könnte man auch versuchen, aus den Fehlern von P und Q rückwärts auf eine Curve i_1 zu schliessen; ist unsere Hypothese berechtigt, so muss sich an einer bestimmten Stelle des Spectrums durch die verschiedensten P , Q und N dieselbe Gestalt der Curve, wenigstens für eine und dieselbe Person, ergeben.

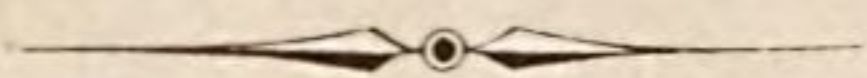
Dass eine derartige Curve i_1 für die physiologische Optik von grösster Bedeutung wäre, braucht nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Für unsern Zweck wollen wir aber nochmals bemerken, dass aus ihr die Berechtigung der Anwendung des Doppelspalts zu physiologischen Intensitätsvergleichen genau ebenso und mit genau den nämlichen Einschränkungen rechnungsmässig nachzuweisen wäre, wie die Berechtigung dieser Methode bei mechanischen Intensitätsbestimmungen bewiesen wurde. Die Existenz einer solchen Curve wird durch die in Wiedemann's Ann. 3 publicirten Vierordt'schen Untersuchungen wahrscheinlich aus den schon angeführten Gründen; die kleinen experimentell bestimmten Fehler von P und Q weisen darauf hin, dass diese Empfindungscurve kleinere Ordinatenschwankungen darbietet als die zuerst benützte physiologische Intensitätscurve, jene wird aber in ihrem Verlauf Steigungen und Senkungen aufweisen, die solchen dieser Curve an den nämlichen Stellen entsprechen. Die mit Voraussetzung der von Vierordt gegebenen physiologischen Intensitätscurve berechneten Abweichungen der einseitigen Coefficienten

vom symmetrischen sind also jedenfalls grösser als die wirklich vorhandenen Abweichungen, bilden also gewissermassen eine obere Grenze für die begangenen Fehler. Und man darf wohl mit Rücksicht auf die schwächere Krümmung der hypothetischen Empfindungscurve hinzufügen: die wirklich begangenen absoluten Fehler der Vierordt'schen Doppelspaltmethode bei symmetrischer Spaltänderung (d. h. die Grössen $\frac{s_1}{h_1} - \frac{m_2}{m_1}$) sind kleiner als die aus der physiologischen Vierordt'schen Intensitätscurve i_1 berechneten.

Bei weiterer Verfolgung dieses Gegenstandes müssten wir uns einer Häufung von Hypothesen schuldig machen. Wir sind deshalb genöthigt abubrechen, bis genügendes empirisches Material vorliegt, um die bereits angeregten optisch-physiologischen Hypothesen zu prüfen. Wir sind uns wohl bewusst, in der vorliegenden Skizze manche hiehergehörige Frage nicht erschöpfend behandelt zu haben; der Mangel an empirischem Material wird dies entschuldigen.

Es sei an dieser Stelle noch eine allgemeine Bemerkung über die mechanische Intensität der Spectra gestattet. Die in der Ebene des Spalts schwingenden Aethertheilchen repräsentiren eine bestimmte Energie, welche abgesehen von den Absorptionen und Reflexionen gleich sein muss der Gesamtenergie des Spectrums. Die Wellenlängen der Strahlen eines continuirlichen Spectrums gehen stetig in einander über; es muss in einem solchen Spectrum innerhalb bestimmter Grenzen Strahlen jeder Wellenlänge geben. Die Strahlen von einerlei Wellenlänge befinden sich alle an einer bestimmten Stelle des Spectrums; sie repräsentiren eine bestimmte Energie, die wir als endlich annehmen müssen, falls wir nicht die Masse oder die Amplitude eines Aethertheilchens als unendlich klein betrachten wollen, wozu kein Grund vorliegt. Wenn nun Strahlen jeder Wellenlänge vorhanden wären, so würde die Gesamtenergie des Spectrums unendlich gross sein. Dieser Widersinn könnte gehoben werden dadurch, dass man annimmt, das Spectrum habe nur scheinbar, für unsere wenig trennenden Instrumente, Strahlen jeder Wellenlänge; in Wirklichkeit sei eine bestimmte endliche, vielleicht sehr grosse Anzahl von Strahlen verschiedener Wellenlänge vorhanden. Man hätte also nur scheinbar continuirliche

Spectra; in Wirklichkeit bestünden dieselben aus einer sehr grossen Zahl heller Linien, getrennt durch dunkle Zwischenräume, deren Wahrnehmung die Spaltbildbreite hinderte. Jedes Spectrum liesse sich demnach in eine endliche Anzahl von Spaltbildern auflösen bei gehörig engem Spalt und grosser trennender Kraft der angewandten optischen Instrumente.



...the ...
...the ...
...the ...
...the ...
...the ...
...the ...
...the ...

Dietrich, Wilhelm,

Die Anwendung des Vierordtschen Doppelspalts in der Spectralanalyse

1881

Math.a. 70 f

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650205-4